Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Julio – 2020

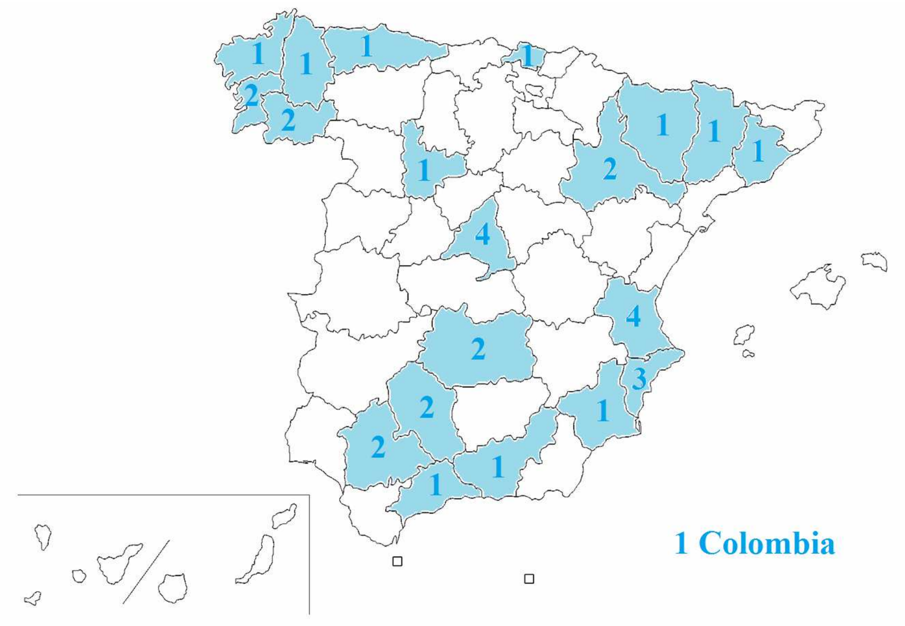
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
001	✓	✓	✓	✓	✓	✓
002	✓	✓	✓	✓	✓	✓
003	✓		✓		✓	

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

55 soluciones de 35 participantes



Alevín (5º/6º Primaria) / Infantil (1º/2º ESO)

A-003 / I-003. Corro de mentirosos.

En este juego, los chicos siempre dicen la verdad a los chicos y mienten a las chicas, y las chicas siempre dicen la verdad a las chicas y mienten a los chicos.

Como en el clásico juego de la gallinita ciega, alrededor de un participante con los ojos vendados se sitúan dieciocho alumnos elegidos al azar formando un corro. Y, con un distorsionador de voz, el primero se gira hacia su compañero de la izquierda, pronuncia la frase *"Eres un chico"* o *"Eres una chica"* y le cede el micrófono distorsionador al siguiente. Y, así, sucesivamente actúan todos. Llevando la cuenta, el participante del centro, que tenía los ojos vendados, ha oído tantas veces una frase como otra. Con este simple dato, ¿podrá determinar con total exactitud, o no, cuántos chicos y cuántas chicas formaban el corro? Justifica debidamente tu contestación.

Solución

Los chicos, por ejemplo, siempre pronunciarán la frase *"Eres un chico"*, diciendo la verdad, si el compañero de la izquierda es chico y, mintiendo, si es chica. Luego, habrá tantos chicos como veces se haya oído tal frase, nueve.

Y, análogamente, aunque ya no se precise, las chicas siempre pronunciarán la frase *"Eres una chica"* diciendo la verdad si la compañera de la izquierda es chica y mintiendo si es chico. Luego, habrá tantas chicas como veces se haya oído tal frase.

En definitiva e, incluso, sólo por la simetría de la situación, podemos afirmar que son nueve chicos y nueve chicas los que formaban el corro.

Bien resuelto por: ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Marina Salamero Cebollero*** *(1º Mat. Unizar),* ***Carlos Medina Muñoz*** *(IES Universidad Laboral. Málaga),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Prof. Jubilado. Coslada),* ***Javier Badesa Pérez*** *(Colegio Santa Ana. Calatayud),* ***Iván López Márquez*** *(C. I. Jesuitas. Alicante),* ***Jordi Herrero Martínez*** *(IES Laurona. Liria),* ***Mario Balda Agudo*** *(Ave María de la Quinta. Granada),* ***Jonás Costas Pais*** *(IES Álvaro Junqueiro. Vigo),* ***Jorge Lafuente Gil*** *(Colegio Salesiano San Juan Bosco. Valencia),* ***Tristán Romera Sobrado*** *(IES San Ignacio BHI. Bilbao),* ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Ángel Blázquez García*** *(CEIP Val de la Atalaya. María de Huerva),* ***Vicente del Amo Sánchez*** *(Facd Químicas UniOvi),* ***Emigdio Pérez Pérez*** *(CC SMªH. Almoradí),* ***Cristian Andrés Córdoba Silvestre*** *(IES Dámaso Alonso. Puertollano),* ***Nicolás Iserte Tarazón*** *(EPLA. Godella) y* ***Antonio González Montalbán*** *(IES Francisco de Quevedo. Villanueva de los Infantes).*

Se recibió también una solución incompleta.

Cadete (3º/4º ESO) / Juvenil (1º/2º Bachillerato)

C-003 / Jv-003. Solitario numérico de verano.

Alejandro pretende colocar todos los números del 1 al 81 en las celdas de un tablero de tamaño 9×9 de forma que si multiplica todos los números de cada fila logre obtener los mismos nueve resultados que si multiplica todos los números de cada columna. ¿Podrá hacerlo? En caso afirmativo, indica cómo y, en caso negativo, justifica porqué.

Solución

Factorizando los nueve productos, por ejemplo, por filas, veremos que los números primos mayores de 40 y menores de 81 (que son estos diez: 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79) sólo aparecen una vez. Y, por el principio del palomar, al ser nueve las filas, podremos asegurar que, al menos, dos de ellos estarán en una misma fila. Y, por tanto, dichos factores primos no podrán estar en una misma columna. Luego, no será posible: el producto de esa fila no podrá obtenerse en ninguna columna.

*Bien resuelto por: **Jordi Herrero Martínez** (IES Laurona. Liria), **Daniel Cebrián Castillo** (IES Trassierra. Córdoba), **Enrique Farré Rey** (IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra), **Marina Salamero Cebollero** (1º Mat. Unizar), **Alberto Rodríguez Durá** (IES Bellaguarda. Altea), **Javier Badesa Pérez** (Colegio Santa Ana. Calatayud), **Celso de Frutos de Nicolás** (Prof. Jubilado. Coslada), **Mario Balda Agudo** (Ave María de la Quinta. Granada), **Daniel Piqueras Valle** (IES Perdouro. Burela), **Héctor Carballude González** (IES As Lagoas. Orense), **Tristán Romera Sobrado** (IES San Ignacio BHI. Bilbao), **Florentino Damián Aranda Ballesteros** (IPEP. Córdoba), **Vicente del Amo Sánchez** (Facd Químicas. UniOvi), **Cristian Andrés Córdoba Silvestre** (IES Dámaso Alonso. Puertollano) y **Nicolás Iserte Tarazón** (EPLA. Godella).*

Se recibió también una solución incorrecta.

Júnior / Sénior

Jn-003 / S-003. Iteraciones polinómicas.

En este juego, un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ se escribe en la pizarra y en cada movimiento se borra y se cambia, bien por $x^2 \cdot p\left(\frac{x+1}{x}\right)$, o bien $(x-1)^2 \cdot p\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

Queremos pasar del polinomio inicial $x^2 + 2x - 3$ al polinomio final $x^2 - 4x + 3$.

Si es posible, indica la secuencia de movimientos que se requiere y, si no es posible, justifica porqué.

Solución-1

El polinomio de entrada $p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene por determinante $\Delta = b^2 - 4ac$

Y vamos a ver que una característica clave de estos dos movimientos es que dejan invariante el discriminante del polinomio que generan.

El polinomio que resulta del primer movimiento:

$$M_1[p(x)] = p_1(x) = x^2 \cdot p\left(\frac{x+1}{x}\right) = x^2 \cdot \left[a \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right) + c\right] =$$

$$= a \cdot (x+1)^2 + b \cdot x \cdot (x+1) + c \cdot x^2 = (a+b+c) \cdot x^2 + (2a+b) \cdot x + a$$

Tiene por determinante:

$$\Delta_1 = (2a+b)^2 - 4 \cdot (a+b+c) \cdot a =$$

$$= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 - 4b - 4ac = b^2 - 4ac = \Delta$$

Y, análogamente, el que resulta del segundo movimiento:

$$M_2[p(x)] = p_2(x) = (x-1)^2 \cdot p\left(\frac{1}{x-1}\right) = (x-1)^2 \cdot \left[a \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right) + c\right] =$$

$$= a + b \cdot (x-1) + c \cdot (x-1)^2 = c \cdot x^2 + (b-2c) \cdot x + (a-b+c)$$

También tiene el mismo determinante:

$$\Delta_2 = (b-2c)^2 - 4 \cdot c \cdot (a-b+c) =$$

$$= b^2 - 4bc + 4c^2 - 4ac + 4bc - 4c^2 = b^2 - 4ac = \Delta$$

Por tanto, no será posible pasar del polinomio inicial $p_i(x) = x^2 + 2x - 3$ al polinomio final $p_f(x) = x^2 - 4x + 3$, pues, sus discriminantes respectivos son distintos $\underline{\Delta_i = 16 \neq 4 = \Delta_f}$

Solución-2

Abreviadamente, con sólo los coeficientes, hemos visto en la solución anterior cómo actúan los dos movimientos permitidos:

$$M_1(a,b,c)=(a+b+c,2a+b,a) \qquad M_2(a,b,c)=(c,b-2c+b,a-b+c)$$

Y se puede comprobar fácilmente que ambos movimientos son inversos:

$$M_1\circ M_2(a,b,c)=(a,b,c) \qquad M_2\circ M_1(a,b,c)=(a,b,c)$$

Por tanto, en cualquier secuencia de estos movimientos se podrán cancelar estos pares, en ambos sentidos, y la secuencia quedará reducida siempre a única sucesión de movimientos de un tipo o de otro.

Si fuera así: $M_1\circ M_1\circ \ldots\circ M_1(1,2,-3)$, tendríamos:

$(1,2,-3)\to(0,4,1)\to(5,4,0)\to(9,14,5)\to(28,32,9)\to\ldots$ y, por ejemplo, viendo como, a partir de aquí, la primera componente va ir siempre aumentando (es suma de valores positivos) podemos asegurar que no llevará nunca a $(1,-4,3)$

Y si fuera así; $M_2\circ M_2\circ \ldots\circ M_2(1,2,-3)$, tendríamos:

$(1,2,-3)\to(-3,8,-4)\to(-4,16,-15)\to(-15,46,-35)\to(-35,116,-96)\to\ldots$ y, análogamente, viendo, por ejemplo, como a partir de aquí, la segunda componente no va a resultar nunca negativa, no se podrá llegar a $(1,-4,3)$

■

También resuelto por: ***Rafael Jiménez Llamas*** *(Máster Física. UAM),* ***Jordi Herrero Martínez*** *(IES Laurona. Liria),* ***Enrique Farré Rey*** *(IES Frei Martín Sarmiento. Pontevedra),* ***Marina Salamero Cebollero*** *(1º Mat. Unizar),* ***Javier Badesa Pérez*** *(Colegio Santa Ana. Calatayud),* ***Jordi Agustí Abella*** *(Prf- CFA. La Seu de Urgell),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(Investigador Postdoctoral. US),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(IES Ruiz de Alda. San Javier),* ***César Catalán Capaccioni*** *(Ingeniero Industrial. Valencia),* ***Laura Burón Malagón*** *(Doble Grado de Física e Ingeniería de Materiales.* ***US.),*** ***Florentino Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP. Córdoba),* ***Manuel Vázquez Mourazos*** *(Master Secundaria. USC. Melide),* ***Manuel de la Rosa Fernández*** *(Máster Secundaria UAB. Barcelona),* ***Larry Andrés Matta Plaza*** *(Unal. Medellín),* ***Alfonso Fernández de Bobadilla*** *(IES San Mateo. Madrid),* ***Cristian Andrés Córdoba Silvestre*** *(IES Dámaso Alonso. Puertollano) y* ***Javier Eduardo Gallardo Ghisoli*** *(Informático. Madrid).*

Se recibieron también dos soluciones incompletas.