PROBLEMA DEL MES

Marzo – 2022

Soluciones

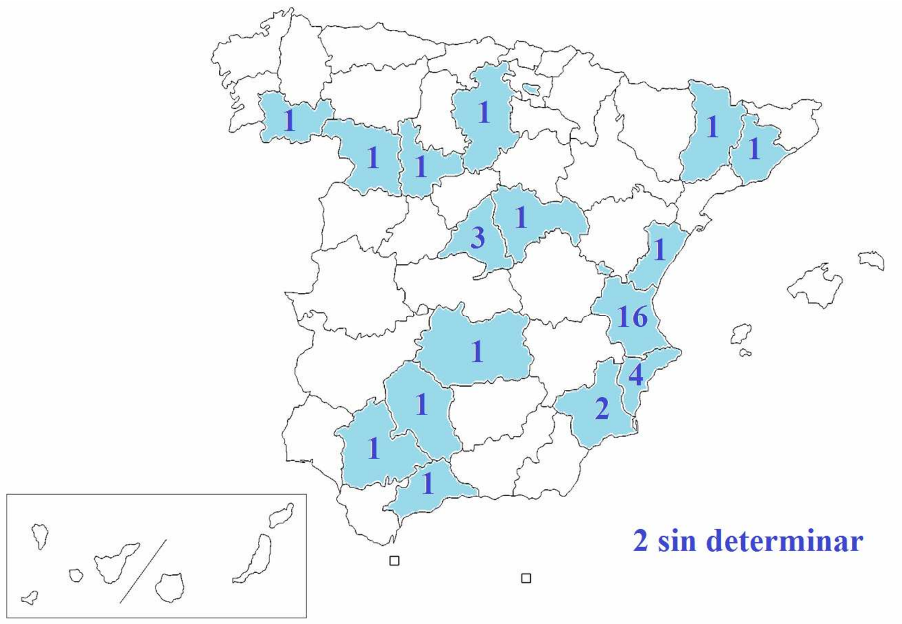
Real Sociedad
Matemática Española

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Junior	Senior
019	✓	✓	✓	✓	✓	✓
020	✓	✓	✓	✓	✓	✓
021	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

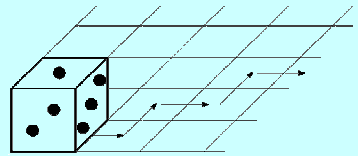
78 respuestas de 39 participantes (29 chicos / 10 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-021. Volteos en zigzag de un dado.

Colocamos un dado estándar (*sus caras opuestas suman 7 puntos*) en una de las casillas de un enorme tablero. Y lo volteamos sobre sus aristas siguiendo el recorrido en zigzag indicado en la figura.

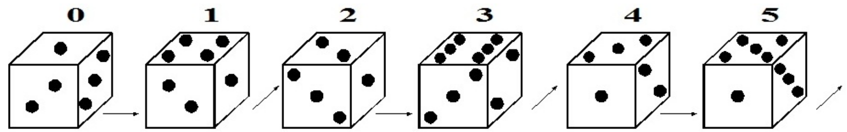


¿Cuál es la posición en la que queda el dado tras efectuar 2022 volteos?

Con la misma perspectiva, ¿qué caras veríamos?

Solución

Es fácil comprobar que la posición del dado se repite cada seis volteos:



Y 2022 es múltiplo de 6 (*2004 = 6 x 337*). Por tanto, tras 2022 volteos, el dado vuelve a estar en la posición inicial.

Bien resuelto por: ***Paula Izquierdo Rodríguez*** *(CEIP Río Arlanzón. Burgos),* ***Jorge Lafuente Gil*** *(S. Juan Bosco. Valencia),* ***Ariadna Franch Pérez*** *(Xátiva),* ***Diego Benavent Pérez*** *(Colegio Alemán. Valencia),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Orense),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Irene Navarro Espada*** *(CEIP Serrano Clavero. Requena),* ***Martí Lozano Miguel*** *(IES Uno. Requena),* ***Emma Atienza Cortes*** *(IES Uno. Requena),* ***Marta Carsi Sánchez*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***José Luis Marín*** *(Escuela de Pensamiento Matemático "Miguel de Guzmán". Torrelodones),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Óscar Pons del Río*** *(IES Alameda. Utiel),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***Javier Delgado Tabernero*** *(Novaschool Añoreta Rincón de la Victoria),* ***Lara Romero Jiménez*** *(IES La Mola. Novelda),* ***Naiara Muñoz Blázquez*** *(IES La Mola. Novelda)*

Infantil (1º/2º ESO)

I-021. Tres puntos con coordenadas enteras.

A, B y C son tres puntos del plano con coordenadas enteras. Las longitudes de los lados del triángulo ABC son números enteros. Demuestra que el perímetro del triángulo ha de ser un número par.

Solución

Sean $A(a_x,a_y)$, $B(b_x,b_y)$ y $C(c_x,c_y)$ los tres puntos con coordenadas enteras.

Por Pitágoras, los cuadrados de las longitudes de cada lado son:

$$AB^2=(b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2=a_x^2+a_y^2+b_x^2+b_y^2-2a_xb_x-2a_yb_y$$

$$BC^2=(c_x-b_x)^2+(c_y-b_y)^2=b_x^2+b_y^2+c_x^2+c_y^2-2b_xc_x-2b_yc_y$$

$$CA^2=(a_x-c_x)^2+(a_y-c_y)^2=a_x^2+a_y^2+c_x^2+c_y^2-2a_xc_x-2a_yc_y$$

La suma de estos tres cuadrados es par:

$$AB^2+BC^2+CA^2=2a_x^2+2a_y^2+2b_x^2+2b_y^2+2c_x^2+2c_y^2\ldots$$

$$\ldots-2a_xb_x-2a_yb_y-2b_xc_x-2b_yc_y=2a_xc_x-2a_yc_y$$

Si la suma de tres cuadrados es par es, bien porque los tres son pares, bien porque dos de ellos son impares y el otro par. Y sabemos, además, que el cuadrado de un número par es par y el cuadrado de un número impar es impar. Por tanto:

- En el primer caso, si los tres son pares, su perímetro es par.
- Y, el segundo caso, con dos impares y un par, su perímetro también resulta par.

Bien resuelto por: ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda)*

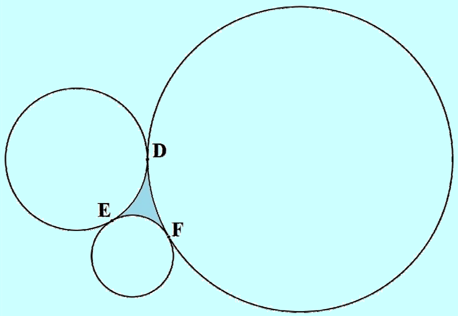
Se recibieron también tres soluciones incompletas y una incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

C-021. Área DEF.

Calcula el valor del área de la región ensombrecida que determinan los puntos de contacto D, E y F de las tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos y de radios:

$$r_1=3-\sqrt{3}$$
$$r_2=\sqrt{3}+1 \text{ y}$$
$$r_3=\sqrt{3}-1$$

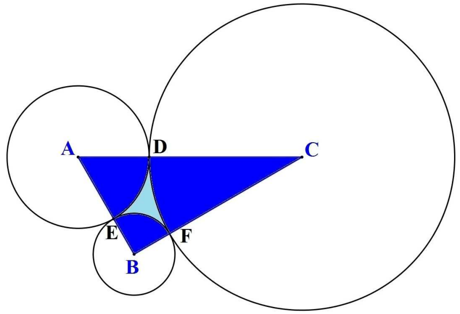


Solución

Si sumamos los radios de dos en dos, obtenemos:

$$r_1+r_2=4,$$
$$r_1+r_3=2 \text{ y}$$
$$r_2+r_3=2\sqrt{3}.$$

Esto es, el triángulo formado por los centros de las tres circunferencias es del tipo $30°:60°:90°$



Por tanto, si S es el valor del área de la región, podremos determinarla restando al área del triángulo ABC la de los tres sectores circulares:

$$S=[ABC]-[A\widehat{D}E]-[B\widehat{E}F]-[C\widehat{F}D]=$$

$$=\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6}\cdot\pi(3-\sqrt{3})^2-\frac{1}{4}\pi(\sqrt{3}-1)^2-\frac{1}{12}\cdot\pi(\sqrt{3}+1)^2=$$

$$=2\sqrt{3}-\pi\left(\frac{12-6\sqrt{3}}{6}+\frac{4-2\sqrt{3}}{4}+\frac{4+2\sqrt{3}}{12}\right)=$$

$$=2\sqrt{3}-\pi\left(\frac{40-16\sqrt{3}}{12}\right)=2\sqrt{3}-\pi\left(\frac{10-4\sqrt{3}}{3}\right)$$

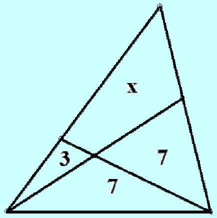
En definitiva: $S=2\sqrt{3}-\pi\left(\frac{10-4\sqrt{3}}{3}\right)\approx 0.2473\ldots$

Bien resuelto por: ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(PEP-Córdoba) que fue el proponente,* ***Jorge Lafuente Gil*** *(S. Juan Bosco. Valencia),* ***Ariadna Franch Pérez*** *(Xátiva),* ***Diego Benavent Pérez*** *(Colegio Alemán. Valencia),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Jubilado-Ourense),* Antonio Roberto Martínez Fernández *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Ana Lozano Miguel*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Eliseo Pérez Alonso*** *(IES Oleana. Requena),* ***Marta Nuévalos Lorente*** *(IES P Castilla. Minglanilla),* ***Omayma Mabtoul Guetbach*** *(IES Uno. Requena),* ***Víctor de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Héctor Rincón de Lucas*** *(IES Pinar de la Rubia. Valladolid),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

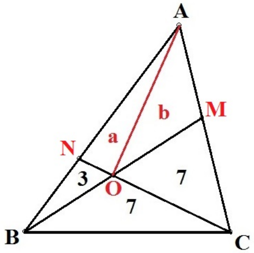
Jv-021. Área equis.

Los números representan áreas. Hallar x



Solución

Designando por $[XYZ]$ al área del triángulo de vértices XYZ, y llamando a y b a las áreas marcadas en la figura, tenemos: $x = a + b$



Los triángulos OBC y OCM tienen misma área, 7, y misma altura, por tanto, $OB = OM$. En consecuencia:

$$[AOB] = [AOM] \Leftrightarrow a + 3 = b$$

Por otra parte: $b - 3 = a = [AON]$, $b + 7 = [AOC]$ son proporcionales a 3 y 7, áreas de los triángulos ONB y OBC que tienen la misma altura, luego:

$$\frac{b-3}{3} = \frac{b+7}{7} \Leftrightarrow 7b - 21 = 3b + 21 \Rightarrow b = \frac{21}{2},\ \ a = \frac{15}{2}$$

Y, finalmente, $\underline{x} = \frac{21+15}{2} = \underline{18}$

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Marcos Monteagudo García** (IES-1 Requena), **Andy Joel Romero Martínez** (IES Francisco de Goya. Molina de Segura), **Carlos Espinós, Juan Luis Ródenas Pedregosa** (IES La Mola. Novelda) y **Juan Manuel Sánchez H** (IES Claudio Moyano. Zamora)*

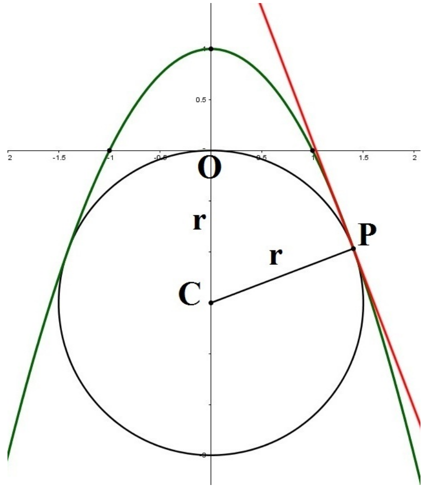
Se recibieron también una solución incompleta y otra incorrecta.

Jn-021. Parábola tangencial.

Dada la parábola $y = 1 - x^2$, halla el radio de la circunferencia centrada en la parte negativa del eje OY, que sea tangente al eje de abscisas y a la parábola. Halla también los dos puntos de tangencia con la parábola.

Solución

Representemos la situación:



Sea $P(a, 1 - a^2)$, con $a > 1$ uno de los dos puntos de tangencia de la parábola y la circunferencia. Y sea $C(0, -r)$ el centro de la circunferencia con $r > 0$ el radio a determinar.

Como la recta tangente a la parábola en P tiene pendiente $-2a$, un vector normal en dicho punto es $\vec{n} = (2a, 1)$ y el vector $\vec{CP}$ será:

$$\vec{CP} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot r = \left(\frac{2ar}{\sqrt{4a^2+1}}, \frac{r}{\sqrt{4a^2+1}} \right).$$

En consecuencia, $\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = \left(\frac{2ar}{\sqrt{4a^2+1}}, -r + \frac{r}{\sqrt{4a^2+1}} \right) \equiv (a, 1 - a^2)$, por lo que: $\frac{2ar}{\sqrt{4a^2+1}} = a$ y $-r + \frac{r}{\sqrt{4a^2+1}} = 1 - a^2$

De la primera ecuación, obtenemos que $r = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}$, y sustituyendo en la segunda:

$$-\frac{\sqrt{4a^2+1}}{2} + \frac{\frac{\sqrt{4a^2+1}}{2}}{\sqrt{4a^2+1}} = 1 - a^2 \ \rightarrow\ -\frac{\sqrt{4a^2+1}}{2} + \frac{1}{2} = 1 - a^2 \ \rightarrow$$

$$2a^2 - 1 = \sqrt{4a^2+1} \ \rightarrow\ 4a^4 - 4a^2 + 1 = 4a^2 + 1 \ \rightarrow$$

$$4a^4 - 8a^2 = 0 \ \rightarrow\ a = 0 \text{ y } a = \pm\sqrt{2} \text{ (sólo es válida } a = \sqrt{2}\text{)}$$

Por tanto, el radio es $r=\dfrac{3}{2}$ y los puntos de tangencia $\underline{P(\sqrt{2},-1)}$ y $\underline{P'(-\sqrt{2},-1)}$ su simétrico respecto el eje OY

Bien resuelto por: ***Carlos Villagordo Espinosa*** *(CDPE British School),* ***Guillem Beltrán Cerezuela*** *(IES Llombai. Burriana),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* **Antonio Roberto Martínez Fernández** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(Universidad de Sevilla),* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Marcos Monteagudo García*** *(IES-1 Requena),* ***Toni Gascó Patiño*** *(IES Emperador Carlos. Barcelona),* ***Carlos Espinós, Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Sénior

S-028. Espiral pitagórica.

Sean un triángulo rectángulo isósceles con el ángulo recto en A_0 y $A_0A_1=1$; OA_1A_2 el triángulo rectángulo con el ángulo recto en A_1 y tal que $A_1A_2=1$; OA_2A_3 el triángulo rectángulo con el ángulo recto en A_2 y tal que $A_2A_3=1$, y así sucesivamente.

Si S_i es el área del triángulo $OA_{i-1}A_i$ con $i=1,2,3,\dots$, y M_n la media de $S_1,S_2,\dots,S_n$, determina el límite: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$

Solución

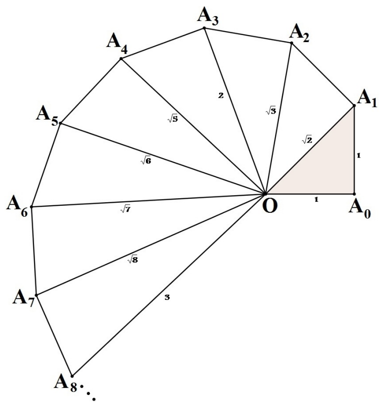
$$OA_0=1 \quad\rightarrow\quad S_1=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$OA_1=\sqrt{2} \quad\rightarrow\quad S_2=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OA_2=\sqrt{3} \quad\rightarrow\quad S_3=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

… … … … … … … … … … … … …
… … … … … … … … … … … … …

$$OA_{n-1}=\sqrt{n} \quad\rightarrow\quad S_n=\frac{1\cdot\sqrt{n}}{2}=\frac{\sqrt{n}}{2}$$



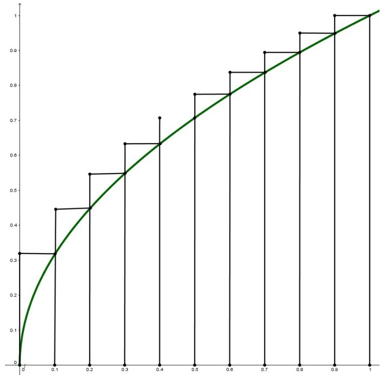
Espiral pitagórica

Sea $f(x)=\sqrt{x}$ y $P\equiv\left\{0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\dots,\dfrac{n-1}{n},1\right\}$ una partición del intervalo $[0,1]$ en n subintervalos iguales.

Así, la suma superior de $f(x)$ para la partición P será:

$$\frac{1}{n}\cdot\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)\right]=$$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\frac{2\cdot M_n}{\sqrt{n}}$$



Por lo que: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{M_n}{\sqrt{n}}}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\dfrac{1}{2}\cdot\left.\dfrac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^1=\underline{\dfrac{1}{3}}$

Bien resuelto por: ***Carlos Villagordo Espinosa*** *(CDPE British School),* ***Guillem Beltrán Cerezuela*** *(IES Llombai. Burriana),* ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* **Antonio Roberto Martínez Fernández** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Alberto Castaño Domínguez*** *(Universidad de Sevilla),* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Marcos Monteagudo García*** *(IES-1 Requena),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES Dolores Ibarruri. Fuenlabrada),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES La Mola. Novelda),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara) y* ***Juan Manuel Sánchez H*** *(IES Claudio Moyano. Zamora)*

Se recibió también una solución incorrecta.