Problema 1. *Sea I_n el conjunto de los n primeros números naturales impares. Por ejemplo: $I_3 = \{1, 3, 5\}$, $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, etc.*

¿Para qué números n el conjunto I_n se puede descomponer en dos partes (disjuntas) de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas?

Solución. Los primeros casos son:

$I_1 = \{1\}$	no descompone
$I_2 = \{1, 3\}$	no descompone
$I_3 = \{1, 3, 5\}$	no descompone
$I_4 = \{1, 3, 5, 7\}$	descompone $\{1, 7\}$ y $\{3, 5\}$
$I_5 =$	no descompone
$I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$	descompone $\{1, 3, 5, 9\}$ y $\{7, 11\}$

Observa que para que I_n se pueda descomponer en dos partes que tengan la misma suma, tiene que ser n par, ya que en ese caso la suma de todos los elementos de I_n es un número par.

Observa que si I_m descompone, entonces también lo hace I_{m+4}, ya que se tiene

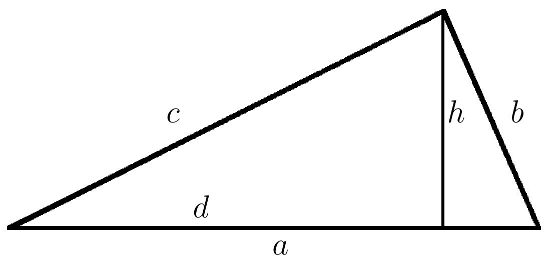
$$I_{m+4} = I_m \cup \{2m + 1, 2m + 3, 2m + 5, 2m + 7\}.$$

Si $I_m = P_1 \cup P_2$ es una descomposición de I_{2m}, entonces $P_1 \cup \{2m+1, 2m+7\}$, $P_2 \cup \{2m+3, 2m+5\}$ es una descomposición de I_{2m+4}.

Como I_4 e I_6 descomponen, podemos concluir que I_n descompone para cada n, par, mayor o igual que 4.

Problema 2. *Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \dfrac{96}{5}$.*

Solución. Consideramos el triángulo rectángulo de la figura.



Buscamos relaciones entre estos segmentos.

El área del triángulo es: $\frac{bc}{2} = \frac{ah}{2}$, de aquí se deduce que

$$bc = ah. \tag{1}$$

Por ser $p = a + b + c$, se tiene $b + c = p - a$, luego $(b + c)^2 = (p - a)^2$, y de aquí, utilizando que $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene $2bc = p^2 - 2pa$. Ahora utilizamos la relación (1) y se tiene: $2ah = p^2 - 2pa$. Finalmente, podemos calcular a como:

$$a = \frac{p^2}{2(h + p)}. \tag{2}$$

Como ya es conocido a, y teniendo en cuenta que se tienen las relaciones: $b+c = p-a$ y $bc = ah$, podemos calcular b y c como las soluciones de la ecuación de segundo grado $z^2-(b+c)z+bc = 0$, esto es de la ecuación $z^2 - (p-a)z + ah = 0$.

En nuestro caso, con los valores dados, se tiene:

$$p = 96,$$

$$h = 96/5,$$

$$a = \frac{p^2}{2(h+p)} = \frac{96^2}{2(96+96/5)} = 40.$$

Falta calcular b y c, que son raíces de la ecuación $z^2 - (p-a)z + ah = 0$, esto es, de la ecuación $z^2 - 56z + 768 = 0$; y cuyas raíces son: 32 y 24.

Los lados del triángulo dado son: 40, 32 y 24.

Problema 3. *Halla todos los números naturales n que verifican la condición:*

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$$

donde $[x]$ es la parte entera de x. (Esto es, $[1{,}32] = 1$, $[2] = 2$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $[\pi] = 3$, etc.)

Solución. Distinguimos casos según n sea de la forma $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ o $6k+5$ (observemos que n es siempre de alguna de estas seis formas) y hacemos la siguiente tabla:

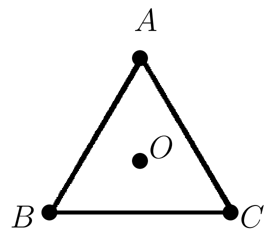
n	$[\frac{n}{2}]$	$[\frac{2n}{3}]$	$[\frac{n}{2}] + [\frac{2n}{3}]$	$n+335$
$6k$	$3k$	$4k$	$7k$	$6k+335$
$6k+1$	$3k$	$4k$	$7k$	$6k+336$
$6k+2$	$3k+1$	$4k+1$	$7k+2$	$6k+337$
$6k+3$	$3k+1$	$4k+2$	$7k+3$	$6k+338$
$6k+4$	$3k+2$	$4k+2$	$7k+4$	$6k+339$
$6k+5$	$3k+2$	$4k+3$	$7k+5$	$6k+340$

Igualando las últimas dos columnas obtenemos que:

- Si $n = 6k$ entonces $7k = 6k + 334$, de donde $k = 335$ y $n = 6\cdot 334 = 2010$.
- Si $n = 6k+1$ entonces $7k = 6k+335$, de donde $k = 336$ y $n = 6\cdot 335 + 1 = 2017$.
- Si $n = 6k+2$ entonces $7k+2 = 6k+336$, de donde $k = 335$ y $n = 6\cdot 334 + 2 = 2012$.
- Si $n = 6k+3$ entonces $7k+3 = 6k+337$, de donde $k = 335$ y $n = 6\cdot 334 + 3 = 2013$.
- Si $n = 6k+4$ entonces $7k+4 = 6k+338$, de donde $k = 335$ y $n = 6\cdot 334 + 4 = 2014$.
- Si $n = 6k+5$ entonces $7k+5 = 6k+339$, de donde $k = 335$ y $n = 6\cdot 334 + 5 = 2015$.

Por tanto, hay seis números que cumplen la ecuación: 2010, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2017.

Problema 4. *Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, como el de la figura.*

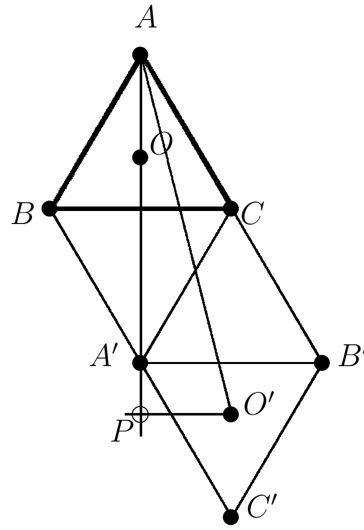


Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A.

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

Solución. Como el rayo se refleja en los lados indicados, basta con desarrollar el camino recorrido por el rayo, para ello desdoblamos el triángulo según la siguiente figura.



Esta figura nos indica que existe un único camino para ir del punto O al punto A reflejándose en los lados del triángulo en el orden indicado. Para calcular la distancia recorrida por el rayo, basta considerar el triángulo APO'; es un triángulo rectángulo del que tenemos que calcular la hipotenusa AO'. Sabemos que $O'P$ es igual a $\frac{1}{2}$. La distancia PA es $1 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ de la altura $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ del triángulo. En este caso tenemos:

$$(AO')^2 = (O'P)^2 + (PA)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{7^2 \times 3}{3^2 \times 2^2} = \frac{1}{4} + \frac{49}{12} = \frac{13}{3}.$$

Por lo tanto la distancia AO' es: $\sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$.

Problema 5. *Calcula las soluciones reales de la ecuación:*

$$\sqrt[4]{97 - X} + \sqrt[4]{X} = 5.$$

Solución. Si llamamos $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{array}\right\}$$

Para resolver este sistema procedemos como sigue:

$$25 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y de aquí se tiene $a^2+b^2 = 25-2ab$. Por otro lado

$$625 = (a+b)^4 = a^4+b^4+4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2 = 97+100ab-2a^2b^2,$$

y de aquí se tiene $a^2b^2-50ab+264=0$. Entonces ab es una raíz de $z^2-50z+264=0$; como las raíces son 44 y 6, estudiamos cada uno de estos casos.

Si $ab=44$, entonces a y b son las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ ab=44 \end{array}\right\}$, luego de la ecuación $z^2-5z+44=0$; ésta no tiene raíces reales. Si $ab=6$, entonces a y b son raíces de la ecuación $z^2-5z+6=0$, que tiene las raíces 3 y 2.

Si $b=3$, entonces $x=81$, y si $x=2$, entonces $x=16$. Éstas son las únicas raíces reales de la ecuación dada.

Solución.[Alternativa] Si llamamos $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{array}\right\}$$

Utilizamos una variable temporal t y escribimos $a = \frac{5}{2}+t$, $b=\frac{5}{2}-t$. entonces se verifica:

$$97 = a^4+b^4 = \left(\frac{5}{2}+t\right)^4 + \left(\frac{5}{2}-t\right)^4 = 2t^4+12\left(\frac{5}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^4.$$

Simplificando resulta:

$$16t^4+600t^2-151=0$$

El valor de t es $\pm\frac{1}{2}$. Se tiene entonces:

$$b = \frac{5}{2}+\frac{1}{2} = 3;$$

$$b = \frac{5}{2}-\frac{1}{2} = 2.$$

Entonces al igualar $b=\sqrt[4]{x}$, resulta:

$$\begin{array}{l} b=3 \Rightarrow x=81, \\ b=2 \Rightarrow x=16, \end{array}$$

que son las únicas dos soluciones reales de la ecuación dada.

Problema 6. *Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.*

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Solución.

<u>*Nota:*</u> El enunciado presenta cierta ambigüedad: hay que distinguir si *"dos raíces enteras"* significa que éstas son distintas, o por el contrario pueden ser raíces dobles.

El caso de dos raíces distintas es sencillo; basta con la primera jugada para el primer jugador. En el caso de raíces dobles tiene que hacer uso también de la segunda jugada.

Una posible estrategia es:

(i) El primer jugador coloca un -1 en el lugar a_4, quedando el polinomio en la forma:

$$X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X - 1$$

De esta forma el primer jugador fuerza a que las posibles raíces enteras del polinomio sean 1 y -1.
(ii) El segundo jugador coloca $a_i \neq 0$ en uno de los huecos.
(iii) El primer jugador coloca $a_j \neq 0$ en uno de los huecos.
(iv) El segundo jugador coloca $a_k \neq 0$ en el único hueco restante.

Observa que el polinomio tiene ahora la forma $X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X - 1$ y que las posibles raíces enteras (distintas) de este polinomio son 1 y -1, ya que el término independiente es -1.

Cuando 1 es una raíz se tiene $1 + a_1 + a_2 + a_3 - 1 = 0$, esto es, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, y cuando -1 es una raíz se tiene $1 - a_1 + a_2 - a_3 - 1 = 0$, esto es $-a_1 + a_2 - a_3 = 0$.

Sean cuales sean los valores de $a_1, a-2, a_3$ se tendrá siempre $2a_2 = 0$, lo que implica que $a_2 = 0$, y esto no está permitido por las reglas del juego. Por lo tanto el caso de dos raíces distintas está resuelto.

En el caso en el que las dos raíces sean iguales.

Si 1 es una raíz doble, entonces se verifica $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ y $4 + 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$, por lo tanto se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 4 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a_3 = 4 + a_1$ y $a_2 = -4 - 2a_1$.

Si -1 es una raíz doble, entonces se verifica $-a_1 + a_2 - a_3 = 0$ y $4 - 3a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$, por lo tanto se tiene:

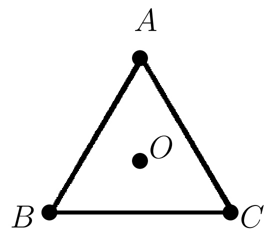
$$\left.\begin{array}{l} -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ 4 - 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a_3 = -4 + a_1$ y $a_2 = -4 + 2a_1$.

Está claro que si el segundo jugador hace $a_i = a_2$, entonces el primer jugador puede colocar $a_j = a_1$ de forma que $-4 - 2a_1 \neq a_2$ y $-4 + 2a_1 \neq a_2$, de esta forma no habrá dos raíces enteras.

Por el contrario, si el primer jugador hace $a_i = a_1$, basta tomar a_2 de forma que $a_2 \neq -4 - 2a_1$ y $a_2 \neq -4 + 2a_1$. El caso de $a_i = a_3$ se hace de la misma forma.

Problema 1. *Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, como el de la figura.*

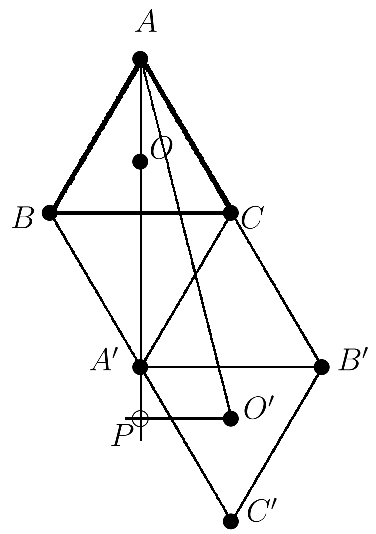


Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A.

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

Solución. Como el rayo se refleja en los lados indicados, basta con desarrollar el camino recorrido por el rayo, para ello desdoblamos el triángulo según la siguiente figura.



Esta figura nos indica que existe un único camino para ir del punto O al punto A reflejándose en los lados del triángulo en el orden indicado. Para calcular la distancia recorrida por el rayo, basta considerar el triángulo APO'; es un triángulo rectángulo del que tenemos que calcular la hipotenusa AO'. Sabemos que $O'P$ es igual a $\frac{1}{2}$. La distancia PA es $1+1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ de la altura $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$ del triángulo. En este caso tenemos:

$$(AO')^2 = (O'P)^2 + (PA)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{7^2 \times 3}{3^2 \times 2^2} = \frac{1}{4} + \frac{49}{12} = \frac{13}{3}.$$

Por lo tanto la distancia AO' es: $\sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$.

Problema 2. *Calcula las soluciones reales de la ecuación:*

$$\sqrt[4]{97-X} + \sqrt[4]{X} = 5.$$

Solución. Si llamamos $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{array}\right\}$$

Para resolver este sistema procedemos como sigue:

$$25 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y de aquí se tiene $a^2+b^2 = 25-2ab$. Por otro lado

$$625 = (a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4ab(a^2+b^2) + 6a^2b^2 = 97 + 100ab - 2a^2b^2,$$

y de aquí se tiene $a^2b^2 - 50ab + 264 = 0$. Entonces ab es una raíz de $z^2 - 50z + 264 = 0$; como las raíces son 44 y 6, estudiamos cada uno de estos casos.

Si $ab = 44$, entonces a y b son las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ ab=44 \end{array}\right\}$, luego de la ecuación $z^2 - 5z + 44 = 0$; ésta no tiene raíces reales. Si $ab = 6$, entonces a y b son raíces de la ecuación $z^2 - 5z + 6 = 0$, que tiene las raíces 3 y 2.

Si $b = 3$, entonces $x = 81$, y si $x = 2$, entonces $x = 16$. Éstas son las únicas raíces reales de la ecuación dada.

Solución.[Alternativa] Si llamamos $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{array}\right\}$$

Utilizamos una variable temporal t y escribimos $a = \frac{5}{2}+t$, $b = \frac{5}{2}-t$. entonces se verifica:

$$97 = a^4 + b^4 = \left(\frac{5}{2}+t\right)^4 + \left(\frac{5}{2}-t\right)^4 = 2t^4 + 12\left(\frac{5}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^4.$$

Simplificando resulta:

$$16t^4 + 600t^2 - 151 = 0$$

El valor de t es $\pm\frac{1}{2}$. Se tiene entonces:

$$b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3;$$

$$b = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Entonces al igualar $b = \sqrt[4]{x}$, resulta:

$$\begin{array}{l} b = 3 \Rightarrow x = 81, \\ b = 2 \Rightarrow x = 16, \end{array}$$

que son las únicas dos soluciones reales de la ecuación dada.

Problema 3. *Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.*

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Solución.

Nota: El enunciado presenta cierta ambigüedad: hay que distinguir si *"dos raíces enteras"* significa que éstas son distintas, o por el contrario pueden ser raíces dobles.

El caso de dos raíces distintas es sencillo; basta con la primera jugada para el primer jugador. En el caso de raíces dobles tiene que hacer uso también de la segunda jugada.

Una posible estrategia es:

(i) El primer jugador coloca un -1 en el lugar a_4, quedando el polinomio en la forma:

$$X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X - 1$$

De esta forma el primer jugador fuerza a que las posibles raíces enteras del polinomio sean 1 y -1.
(ii) El segundo jugador coloca $a_i \neq 0$ en uno de los huecos.
(iii) El primer jugador coloca $a_j \neq 0$ en uno de los huecos.
(iv) El segundo jugador coloca $a_k \neq 0$ en el único hueco restante.

Observa que el polinomio tiene ahora la forma $X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X - 1$ y que las posibles raíces enteras (distintas) de este polinomio son 1 y -1, ya que el término independiente es -1.

Cuando 1 es una raíz se tiene $1 + a_1 + a_2 + a_3 - 1 = 0$, esto es, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, y cuando -1 es una raíz se tiene $1 - a_1 + a_2 - a_3 - 1 = 0$, esto es $-a_1 + a_2 - a_3 = 0$.

Sean cuales sean los valores de $a_1, a-2, a_3$ se tendrá siempre $2a_2 = 0$, lo que implica que $a_2 = 0$, y esto no está permitido por las reglas del juego. Por lo tanto el caso de dos raíces distintas está resuelto.

En el caso en el que las dos raíces sean iguales.

Si 1 es una raíz doble, entonces se verifica $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ y $4 + 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$, por lo tanto se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 4 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a_3 = 4 + a_1$ y $a_2 = -4 - 2a_1$.

Si -1 es una raíz doble, entonces se verifica $-a_1 + a_2 - a_3 = 0$ y $4 - 3a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$, por lo tanto se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ 4 - 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a_3 = -4 + a_1$ y $a_2 = -4 + 2a_1$.

Está claro que si el segundo jugador hace $a_i = a_2$, entonces el primer jugador puede colocar $a_j = a_1$ de forma que $-4-2a_1 \neq a_2$ y $-4+2a_1 \neq a_2$, de esta forma no habrá dos raíces enteras.

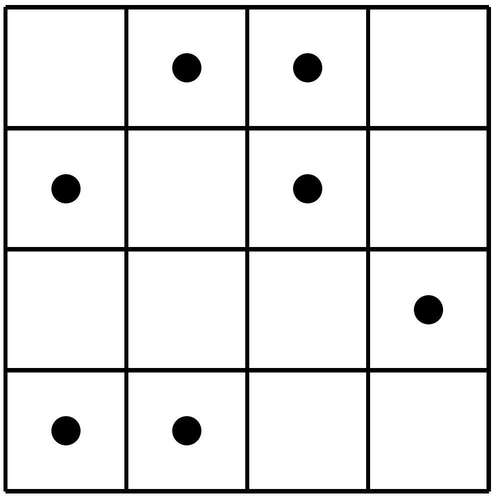
Por el contrario, si el primer jugador hace $a_i = a_1$, basta tomar a_2 de forma que $a_2 \neq -4 - 2a_1$ y $a_2 \neq -4 + 2a_1$. El caso de $a_i = a_3$ se hace de la misma forma.

Problema 4. *Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.*

(a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.

(b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se puede eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.

Solución. (a). Una solución es:

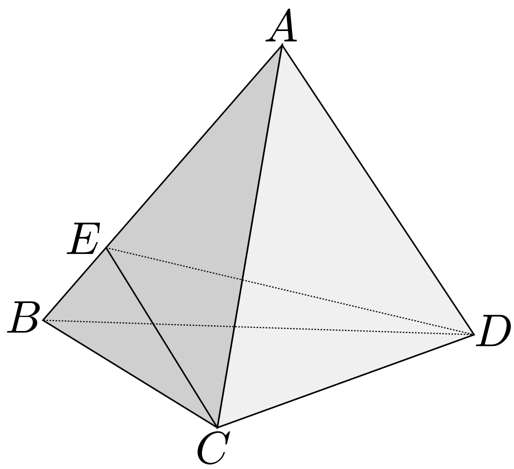


(b). Si se tienen 6 fichas en el tablero, alguna columna tendrá al menos dos fichas; eliminamos esa columna.

Quedan, como máximo 4 fichas, y exactamente tres columnas. Por el mismo procedimiento podemos ahora eliminar una columna de forma que nos queden. como máximo, dos fichas en el tablero.

El tercer y cuarto paso consiste en eliminar dos filas de forma que no queden fichas en el tablero.

Problema 5. *Se considera un tetraedro regular como el de la figura. Si el punto E recorre la arista AB. ¿Cuándo el ángulo $\widehat{CED}$ es máximo?*



Solución. Supongamos que el tetraedro tiene arista de longitud 1, sea α el ángulo CED y x la longitud del segmento AE.

Si aplicamos el Teorema del coseno al triángulo AEC tenemos:

$$EC^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 60^o = x^2 + 1 - x.$$

Por simetría se tiene que la longitud EC es igual a la longitud ED. De nuevo por el Teorema del coseno, ahora para el triángulo ECD, se tiene

$$1 = (x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) - 2(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 \cos\alpha$$

$$1 = 2(x^2 - x + 1)(1 - \cos\alpha).$$

Despejando se tiene:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2(x^2 - x + 1)}. \tag{1}$$

Por ser la función cos decreciente en el primer cuadrante, par encontrar el valor máximo de α tenemos que buscar el valor de $x \in [0,1]$ que haga mínima la función dada en (1), o equivalentemente que haga mínimo el denominador $x^2 - x + 1$. Es evidente que este mínimo se alcanza para $x = \frac{1}{2}$.

La respuesta es: cuando el punto E es el punto medio del lado AB. Podemos calcular en este caso el valor de α; se tiene: $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

Problema 6. *Decimos que un conjunto E de números naturales es* especial *cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto ab.*

(a) Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.

(b) ¿Existe un conjunto especial formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?

Solución. (a). Un conjunto especial de tres elementos es $\{2, 3, 4\}$.

(b). Supongamos que $\{x, x+y, x+2y, x+3y\}$ forman un conjunto especial.

Podemos suponer que x e y son primos relativos, pues si llamamos $d = mcd\{x, y\}$ y $d \neq 1$, tomando $x' = x/d$ e $y' = y/d$ tenemos un conjunto especial $\{x', x'+y', x'+2y', x'+3y'\}$ con x' e y' primos relativos.

Sean pues x e y primos relativos. Por ser el conjunto especial y^2 divide a $x(x+y)$, y existe un entero k tal que $x(x+y) = y^2k$, por lo tanto $x^2 = y^2k - xy = y(yk - x)$, lo que implica que $y = 1$ al ser un divisor común de x e y.

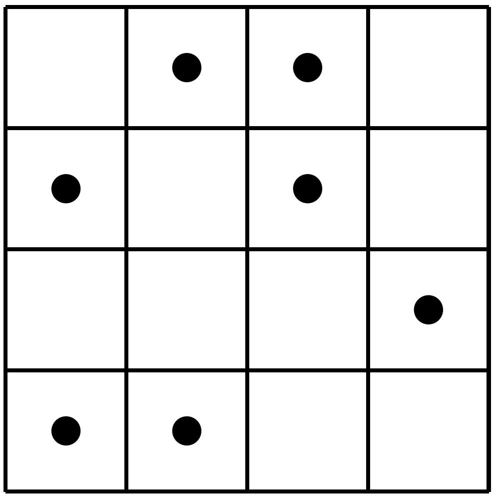
Así pues el conjunto especial es de la forma $\{x, x+1, x+2, x+3\}$. Al ser especial 4 es un divisor de $x(x+2)$ y de $(x+1)(x+3)$, pero uno de ellos es un número impar, lo que es una contradicción. Por lo tanto la suposición de que existe un conjunto especial formado por cuatro términos en progresión aritmética es falsa.

Problema 1. *Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.*

(a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.

(b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se puede eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.

Solución. (a). Una solución es:

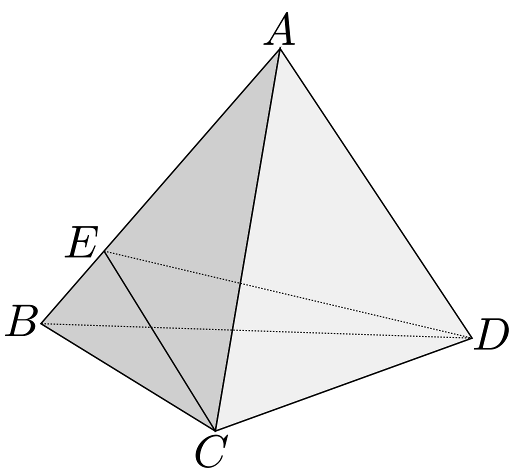


(b). Si se tienen 6 fichas en el tablero, alguna columna tendrá al menos dos fichas; eliminamos esa columna.

Quedan, como máximo 4 fichas, y exactamente tres columnas. Por el mismo procedimiento podemos ahora eliminar una columna de forma que nos queden. como máximo, dos fichas en el tablero.

El tercer y cuarto paso consiste en eliminar dos filas de forma que no queden fichas en el tablero.

Problema 2. *Se considera un tetraedro regular como el de la figura. Si el punto E recorre la arista AB. ¿Cuándo el ángulo $\widehat{CED}$ es máximo?*



Solución. Supongamos que el tetraedro tiene arista de longitud 1, sea α el ángulo CED y x la longitud del segmento AE.

Si aplicamos el Teorema del coseno al triángulo AEC tenemos:

$$EC^2 = x^2 + 1 - 2x \cos 60^o = x^2 + 1 - x.$$

Por simetría se tiene que la longitud EC es igual a la longitud ED. De nuevo por el Teorema del coseno, ahora para el triángulo ECD, se tiene

$$1 = (x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) - 2(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 \cos \alpha$$

$$1 = 2(x^2 - x + 1)(1 - \cos \alpha).$$

Despejando se tiene:

$$\cos \alpha = 1 \ - \ \frac{1}{2(x^2 - x + 1)}. \tag{1}$$

Por ser la función cos decreciente en el primer cuadrante, par encontrar el valor máximo de α tenemos que buscar el valor de $x \in [0, 1]$ que haga mínima la función dada en (1), o equivalentemente que haga mínimo el denominador $x^2 - x + 1$. Es evidente que este mínimo se alcanza para $x = \frac{1}{2}$.

La respuesta es: cuando el punto E es el punto medio del lado AB. Podemos calcular en este caso el valor de α; se tiene: $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$.

Problema 3. *Decimos que un conjunto E de números naturales es* especial *cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a - b)^2$ divide al producto ab.*

(a) Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.

(b) ¿Existe un conjunto especial formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?

Solución. (a). Un conjunto especial de tres elementos es $\{2, 3, 4\}$.

(b). Supongamos que $\{x, x + y, x + 2y, x + 3y\}$ forman un conjunto especial.

Podemos suponer que x e y son primos relativos, pues si llamamos $d = mcd\{x, y\}$ y $d \neq 1$, tomando $x' = x/d$ e $y' = y/d$ tenemos un conjunto especial $\{x', x' + y', x' + 2y', x' + 3y'\}$ con x' e y' primos relativos.

Sean pues x e y primos relativos. Por ser el conjunto especial y^2 divide a $x(x + y)$, y existe un entero k tal que $x(x + y) = y^2k$, por lo tanto $x^2 = y^2k - xy = y(yk - x)$, lo que implica que $y = 1$ al ser un divisor común de x e y.

Así pues el conjunto especial es de la forma $\{x, x + 1, x + 2, x + 3\}$. Al ser especial 4 es un divisor de $x(x + 2)$ y de $(x + 1)(x + 3)$, pero uno de ellos es un número impar, lo que es una contradicción. Por lo tanto la suposición de que existe un conjunto especial formado por cuatro términos en progresión aritmética es falsa.

Problema 4. *Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma.*

Halla la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas.

Solución. Una forma de hacer una disposición en la que no haya dos hayas consecutivas puede ser imaginar plantados todos los robles y todas las encinas y colocar las cinco haya entre los huecos y los extremos; tenemos pues ocho huecos para colocar las hayas.

El problema puede plantearse con dos supuestos diferentes, aunque el resultado final es el mismo.

Supuesto 1. No es posible distinguir los robles entre sí, las encinas entre sí y las hayas entre sí. El número total de disposiciones es igual a las permutaciones con repetición de 12 elementos de los que 3, 4 y 5 son iguales entre si; esto es $\frac{12!}{3!\,4!\,5!}$. El número de disposiciones favorables es igual a las combinaciones de 8 elementos tomados de 5 en 5 multiplicado por el número de permutaciones con repetición de 7 elementos de los que 3 y 4 son iguales entre sí. La probabilidad es:

$$p_1 = \frac{\frac{8!}{5!\,3!}\,\frac{7!}{3!\,4!}}{\frac{12!}{3!\,4!\,5!}} = \frac{7}{11 \times 9} = \frac{7}{99}.$$

Supuesto 2. Es posibles distinguir entre los robles, encinas y hayas. En este caso el número total de disposiciones es 12!, y el de disposiciones favorables es el producto de 7!, la forma de colocar los robles y las encinas, por $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$, la forma de colocar las cinco hayas de fora que no haya dos hayas consecutivas. La probabilidad es:

$$p_2 = \frac{(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4)\,(7!)}{12!} = \frac{7}{11 \times 9} = \frac{7}{99}.$$

Problema 5. *Calcula las soluciones reales de la ecuación:*

$$\sqrt[3]{1729 - X} + \sqrt[3]{X} = 19.$$

Solución. Si llamamos $a = \sqrt[3]{1729 - x}$ y $b = \sqrt[3]{x}$, se tiene que a y b son raíces del sistema $\left.\begin{array}{l} a+b=19 \\ a^3+b^3=1729 \end{array}\right\}$. Para resolver este sistema procedemos como sigue:

$$19^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 1729 + 3 \times 19ab,$$

de aquí se tiene $ab = 90$. Luego a y b son las raíces del sistema $\left.\begin{array}{l} a+b=19 \\ ab=90 \end{array}\right\}$, y por tanto de la ecuación $z^2 - 19z + 90 = 0$. Como las raíces de ésta son 10 y 9, resulta que $x = 10^3 = 1000$ y $x = 9^3 = 729$ son las únicas raíces reales de la ecuación dada.

Problema 6. *Averigua qué números de cuatro cifras significativas, $\overline{abcd}$ (con $a \neq 0$), son iguales a $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{cd}$.*

Nota: La notación $\overline{ab}$ representa, en este problema, el número que tiene a decenas y b unidades; en este caso se tiene que $a, b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Solución. Tenemos $\overline{abcd} = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{cd}$, por lo tanto

$$\overline{ab00} = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - 2\overline{cd} = \overline{ab}^2 + (\overline{cd} - 1)^2 - 1,$$

y de aquí se tiene:

$$\overline{ab00} + 1 = \overline{ab}^2 + (\overline{cd} - 1)^2. \tag{2}$$

Vamos a reordenar los términos de esta expresión para determinar los valores de a, b, c y d. Escribimos

$$1 = \overline{ab}^2 - 100\overline{ab} + (\overline{cd} - 1)^2 = (\overline{ab} - 50)^2 + (\overline{cd} - 1)^2 - 50^2. \tag{3}$$

y ordenando los términos

$$2501 = 50^2 + 1 = \overline{ab}^2 - 100\overline{ab} + (\overline{cd} - 1)^2 = (\overline{ab} - 50)^2 + (\overline{cd} - 1)^2. \tag{4}$$

Tenemos que descomponer 2501 como suma de dos cuadrados; las única descomposiciones son:

$$2501 = 50^2 + 1 = 49^2 + 10^2.$$

Analizar los diferentes casos para una descomposición del tipo $2501 = x^2 + y^2$,utilizando las cifras de las unidades; módulo 10 éstas deben sumar 1. Se tienen las siguientes tablas:

Unidades de n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unidades de n^2:	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Tenemos entonces las siguientes posibilidades par comenzar el análisis:

Unidades de x^2	Unidades de y^2	Unidades de x	Unidades de y
0	1	0	1
0	1	0	9
1	0	1	0
1	0	9	0
5	6	5	4
5	6	5	6
6	5	4	5
6	5	6	5

Estudiamos ahora los posibles valores para $\overline{ab} - 50$, siendo $(\overline{ab} - 50)^2 = 50^2, 1^2, 49^2$ y 10^2.

$\overline{ab} - 50 =$	$\overline{ab}$		$2501 - (\overline{ab} - 50)^2$	$\overline{cd} - 1$	$\overline{cd}$	solución: $\overline{abcd}$
50	100	*NO*				
−50	0	*NO*				
1	51		2500	50	51	5151
−1	49		2500	50	51	4951
49	99		100	10	11	9911
−49	1	*NO*				
10	60		2401	49	50	6050
−10	40		2401	49	50	4050