Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Octubre – 2022

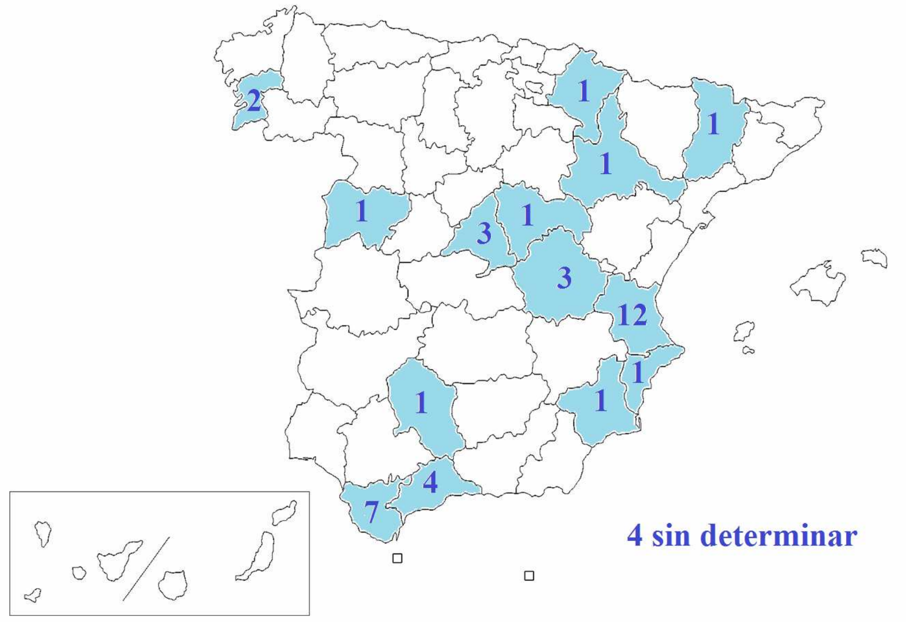
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
025	✓	✓	✓	✓	✓	✓
026	✓	✓	✓	✓	✓	✓
027	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

75 respuestas de 43 participantes (31 chicos / 12 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-027. Calculadora rayada.

Mi vieja calculadora está muy, pero que muy, rayada. Al sumar me da resultados tan disparatados como estos: $1+1=4$, $2+5=14$ ó $3+9=24$. Te la dejo. A ver si eres capaz de decirme qué suma hacer para obtener 27 como resultado.

Hazlo como en los ejemplos, usando sumandos iguales y usando sumandos distintos

Solución

Como esta calculadora rayada hace: $1+1=4$, $2+5=14$ ó $3+9=24$, podemos intuir que, al pretender sumar dos números, lo que efectivamente hace es devolver el doble de la suma de esos dos números, esto es: $a+b=2(a+b)$. Por tanto, hemos de introducir dos números que realmente sumen exactamente la mitad: $13'5$.

Por ejemplo: $\underline{10+3'5=2\cdot 13'5=27}$ ó $\underline{13+0'5=2\cdot 13'5=27}$ o, incluso, si pidiéramos constatarlo, con más sumandos: $\underline{5+7+1'5=2\cdot 13'5=27}$

Y, si queremos dos sumandos iguales, no cabe otra: $\underline{6'75+6'75=2\cdot 13'5=27}$

Bien resuelto por: ***Antonio de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Irene Navarro Espada*** *(IES Uno. Requena),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Omayma Mabtoul Guetbach*** *(IES Uno. Requena),* ***Víctor de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Ricardo Puig Navarro*** *(CEIP Puerta de Castilla. Minglanilla),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Mateo Muiños Martínez*** *(IES Sanxenxo),* ***Elisa Estévez Molina*** *(P2-CI María Montessori. Málaga),* ***Adam Bendadz*** *(CEIP Puerta de Castilla. Minglanilla),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Pau Gregori Bataller*** *(IES Ausias March. Gandía),* ***Javier Rodríguez Seijas*** *(IES Sanxenxo) y* ***Güemes Asensio Pau*** *(¿?)*

Se recibieron también tres soluciones incompletas.

Infantil (1º/2º ESO)

I-027. Cinco-cinco.

Probablemente este sea tu primer sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas.

¿Te atreves a resolverlo?

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=1\\ x_2+x_3&=2\\ x_3+x_4&=3\\ x_4+x_5&=4\\ x_5+x_1&=5 \end{aligned}$$

Solución

- En primer lugar, sumando todas las ecuaciones: $2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)=15$

  Luego $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7'5$

- Sumando, por ejemplo, la primera y la tercera ecuación: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

  Luego: $x_5 = 7'5 - 4 = 3'5$ y ya, a partir de aquí, salen todas las demás
- De la quinta: $x_1 = 5 - 3'5 = 1'5$
- De la primera: $x_2 = 1 - 1'5 = -0'5$
- De la segunda: $x_3 = 2 - (-0'5) = 2'5$
- Y, de la tercera: $x_4 = 3 - 2'5 = 0'5$

Y puedes comprobar fácilmente que esta es la única solución al, en principio, terrible, pero no tanto, primer sistema de cinco ecuaciones con cinco incógnitas al que, sin duda, te has enfrentado:

$$\underline{x_1 = 1'5},\quad \underline{x_2 = -0'5},\quad \underline{x_3 = 2'5},\quad \underline{x_4 = 0'5} \quad \text{y} \quad \underline{x_5 = 3'5}$$

Bien resuelto por: ***Antonio de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Irene Navarro Espada*** *(IES Uno. Requena),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Omayma Mabtoul Guetbach*** *(IES Uno. Requena),* ***Víctor de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Pablo Morales Martín*** *(CEIP Agustín de Argüelles. Alcorcón),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Rubén Ortí Pascual*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Antonio Ponce Armada*** *(IES Torre Atalaya. Málaga),* ***Pau Gregori Bataller*** *(IES Ausias March. Gandía),* ***Hugo Velarde España*** *(¿?),* ***Javier Rodríguez Seijas*** *(IES Sanxenxo),* ***Marina Torres Roldán*** *(IES Torre Atalaya. Málaga),* ***Elsa Gigling Michaud*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES Antonio Sequeros. Almoradí),* ***José Ángel Valle Valenzuela*** *(¿?),* ***Candela Andreu Palomas*** *(¿?) y* ***Güemes Asensio Pau*** *(¿?)*

Se recibieron también dos soluciones incorrectas

Cadete (3º/4º ESO)

C-027. Cuestión clásica de relojes analógicos.

Obtén la expresión matemática que nos da el ángulo que forman las agujas de un reloj analógico en el momento exacto que marca las h horas y m minutos.

Solución

Sabemos que la circunferencia de un reloj analógico se divide en 60 divisiones de minutos o lo que es lo mismo en 360º y que entre dos marcas horarias contiguas hay 5 divisiones de minutos, o lo que es lo mismo, 30º.

La aguja horaria recorre 30º en una hora y, por tanto, se mueve con una velocidad $v_h = 30\,{}^{\circ}\!/_{h} = \frac{30}{60}\,{}^{\circ}\!/_{m} = 0'5\,{}^{\circ}\!/_{m}$. Análogamente, el minutero recorre 360º en una hora y, por tanto, su velocidad es $v_m = 360\,{}^{\circ}\!/_{h} = \frac{360}{60}\,{}^{\circ}\!/_{m} = 6\,{}^{\circ}\!/_{m}$

A las h horas en punto las agujas del reloj forma $30h$º. Pasados m minutos, la aguja horaria recorre α_h grados y el minutero α_m grados y como $v_h = \frac{\alpha_h}{m} = 0'5$ y $v_m = \frac{\alpha_m}{m} = 6$, se tiene que $\alpha_h = 0'5m$ y $\alpha_m = 6m$.

Luego el ángulo que forman la aguja horaria y el minutero a las h horas y m minutos será: $\underline{\alpha} = |30h + \alpha_h - \alpha_m| = |30h + 0'5m - 6m| = \underline{|30h - 5'5m|}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Cristina Ceaus*** *(IES Dunas de las Chapas. Marbella),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***Empar Navarro Dolz*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Javier Ruiz de Larriva*** *(Centro Inglés. Pto Sta María),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Javier Rodríguez Seijas*** *(IES Sanxenxo),* ***Alejandro Canuto Chiva*** *(IES Luis Vives. Valencia) y* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES Antonio Sequeros. Almoradí)*

Se recibieron también seis soluciones incorrectas

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-027. Maldita ecuación logarítmica.

Dados dos números reales positivos, $a, b \in \Re^+$, tales que $\sqrt[27]{1 + a^{27}} = b$ resuelve la ecuación $1 + x^{\log_b a} = x$ con $x > 0$

Solución

Obsérvese, por un lado que: $\sqrt[27]{1 + a^{27}} > 1 \;\rightarrow\; b > 1$

y por otro que: $\sqrt[27]{1 + a^{27}} > a \;\rightarrow\; b > a$

y también que: $1 + a^{27} = b^{27}$

Haciendo el cambio de variable $z = \log_b x$, la ecuación dada puede escribirse así:

$$1 + x^{\log_b a} = x \;\rightarrow\; 1 + \left(b^z\right)^{\log_b a} = b^z \;\rightarrow\; 1 + b^{z \cdot \log_b a} = b^z \;\rightarrow$$

$$1 + b^{\log_b a^z} = b^z \;\rightarrow\; 1 + a^z = b^z \;\rightarrow\; z = 27 \text{ solución única}$$

Este último paso se justifica porque de $1 + a^z = b^z$ se deduce que $\left(\frac{1}{b}\right)^z + \left(\frac{a}{b}\right)^z = 1$ expresión en la que el primer término es una suma de función decreciente, suma de dos funciones decrecientes (exponenciales con base menor que la unidad) y el segundo una función constante, por tanto, solo coincidirán en una sola ocasión.

Y, finalmente, $z = 27 \;\rightarrow\; \underline{x = b^{27}}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Alejandro Canuto Chiva*** *(IES Luis Vives. Valencia) y* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES Antonio Sequeros. Almoradí)*

Se recibieron también tres soluciones incorrectas

Júnior

Jn-027. Producto unidad.

Si $a_i > 0$ para $i = 1, 2, ..., n$ siendo $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$ probar que:

$$(a_1 + n)\cdot(a_2 + n)\cdot ... \cdot(a_n + n) \geq (1+n)^n$$

Solución

Para cada natural i entre 1 y n, sean los $n+1$ números: $a_i, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{n \text{ unos}}$

Aplicando que la media aritmética es mayor o igual que la media geométrica, tenemos que: $\dfrac{a_i + n}{1+n} \geq \sqrt[n+1]{a_i}$ para $i = 1, 2, ..., n$

Y multiplicando esas n desigualdades:

$$\frac{(a_1 + n)\cdot(a_2 + n)\cdot ... \cdot(a_n + n)}{(1+n)^n} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = 1$$

que prueba lo deseado

Solución de Javier Badesa

Definimos $b_i = La_i \quad \forall i = 1, 2, ..., n$ que existe porque $a_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$

Sea $f: \Re \to \Re$ la función definida por $f(x) = L(e^x + n) \quad \forall x \in \Re$

Como $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + n} = 1 - \dfrac{n}{e^x + n}$ y $f''(x) = \dfrac{ne^x}{(e^x+n)^2} > 0$, podemos asegurar que $f(x)$ es convexa $\forall x \in \Re$.

Y, entonces, por la **desigualdad de Jensen**: $\dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(b_i) \geq f\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}\right) \rightarrow$

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} L(e^{b_i} + n) \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} La_i}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} L(e^{b_i} + n) \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} La_i}{n}\right) \rightarrow$$

$$\frac{1}{n}\cdot L\left(\prod_{i=1}^{n}(e^{La_i} + n)\right) \geq f\left(\frac{L\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)}{n}\right) = f\left(\frac{L1}{n}\right) = f(0) \rightarrow$$

$$L\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i + n)\right) \geq n\cdot f(0) = n \cdot L(1+n) = \rightarrow e^{L\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i+n)\right)} \geq e^{n\cdot L(1+n)} = e^{L(1+n)^n}$$

Luego: $\underline{\prod_{i=1}^{n}(a_i + n) \geq (1+n)^n}$ c.q.d.

Y la igualdad se da si y solo si:

$$b_1 = b_2 = ... = b_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i \Leftrightarrow La_1 = La_2 = ... = La_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} La_i \Leftrightarrow$$

$$La_1 = La_2 = ... = La_n = \frac{1}{n}\cdot L\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\cdot L1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$La_1 = La_2 = ... = La_n = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} La_i = \frac{1}{n}\cdot L\prod_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\cdot L1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_1 = a_2 = ... = a_n = e^0 = 1$$

Bien resuelto por: ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES Antonio Sequeros. Almoradí) y* ***Javier Badesa Pérez*** *(IES Leonardo Chabacier. Calatayud)*

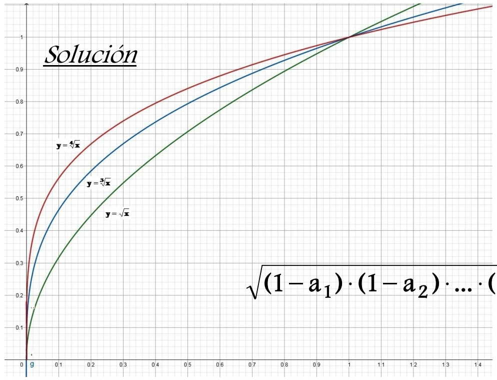
Se recibió también dos soluciones incorrectas.

Sénior

S-027. Entre cero y uno.

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos menores que la unidad.

Probar que si $n \geq 3$: $\quad \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)} < 1$



Solución

$a_i \in]0,1[$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} < \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

$$\sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)} < \sqrt[n]{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)}$$

Por la desigualdad entre las medias geométrica y aritmética:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\sqrt[n]{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)} \leq \frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\ldots+(1-a_n)}{n}$$

En definitiva:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)} <$$
$$< \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{(1-a_1)+(1-a_2)+\ldots+(1-a_n)}{n} = 1$$

Solución de Javier Badesa

Como $a_1, a_2, \ldots, a_n \in]0,1[$ y $n \geq 3$, se ve que:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)} =$$
$$= \sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)} \cdot \sqrt{(1-a_3)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)} <$$
$$< \sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{1 \cdot \ldots \cdot 1} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)} \cdot \sqrt{(1-0)\cdot \ldots \cdot (1-0)} =$$
$$= \sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{1^{n-2}} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)} \cdot \sqrt{(1-0)^{n-2}} =$$
$$= \sqrt{a_1 \cdot a_2} \cdot \sqrt{1} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)} \cdot \sqrt{1} =$$
$$= \sqrt{a_1 \cdot a_2} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)}$$

Aplicando la **desigualdad de Cauchy-Schwarz** a los vectores $\vec{u} = \left(\sqrt{a_1}, \sqrt{1-a_1}\right)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{a_2}, \sqrt{1-a_2}\right)$, se tiene que $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\|$, esto es:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)} \leq \sqrt{\left(\sqrt{a_1}\right)^2 + \left(\sqrt{1-a_1}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{a_2}\right)^2 + \left(\sqrt{1-a_2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{a_1 + 1 - a_1} \cdot \sqrt{a_2 + 1 - a_2} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = 1$$

Y juntando todo:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)} < \sqrt{a_1 \cdot a_2} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)} \leq 1$$

$$\underline{\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt{(1-a_1)\cdot(1-a_2)\cdot \ldots \cdot (1-a_n)} < 1}$$ c.q.d.

Bien resuelto por: ***Jordi Agustí Abella*** *(CFA. La Seu de Urgell),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***Clemente Sacristán Moreno*** *(Guadalajara),* ***Sergio Sánchez Zufía*** *(Navarra),* ***Juan Luis Ródenas Pedregosa*** *(IES Antonio Sequeros. Almoradí) y* ***Javier Badesa Pérez*** *(IES Leonardo Chabacier. Calatayud)*

Se recibieron también una solución incompleta y otra incorrecta