Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Febrero – 2023

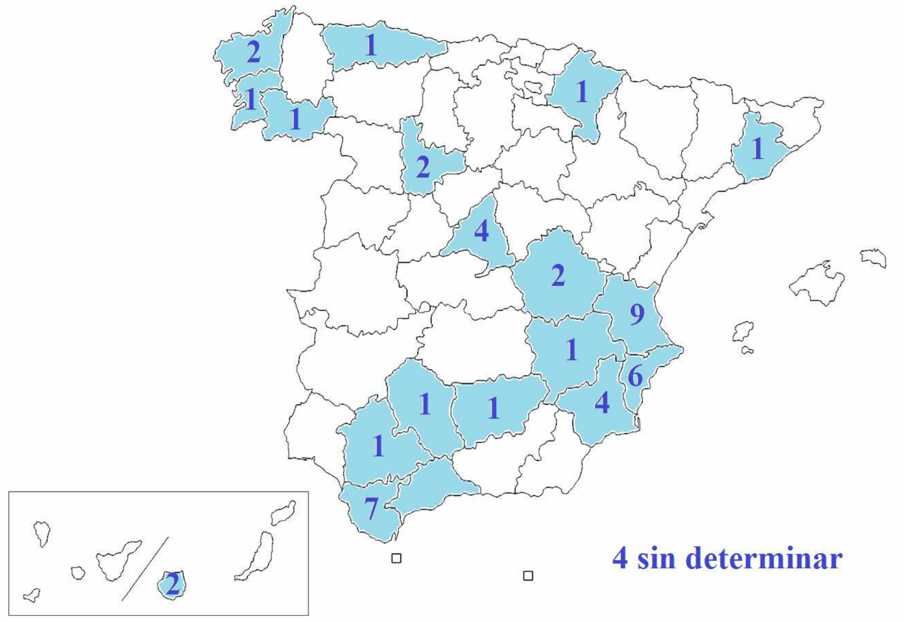
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
029	✓		✓		✓	
030	✓	✓	✓	✓	✓	✓
031	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

104 respuestas de 51 participantes (39 chicos / 12 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-031. Transformadores de números.

Tenemos dos peculiares transformadores de números: $\boxed{I}$ y $\boxed{P}$.

Un número **n** que atraviese $\boxed{I}$ sale transformado en el ***n-simo*** impar. Por ejemplo:

$2 \rightarrow \boxed{I} \rightarrow 3$ — si entra el **2** sale un **3**, el *2º* impar

$3 \rightarrow \boxed{I} \rightarrow 5$ — si entra el **3** sale un **5**, el *3º* impar

Un número **n** que atraviese $\boxed{P}$ sale transformado en el **n-simo** par. Por ejemplo:

$2 \rightarrow \boxed{P} \rightarrow 4$ — si entra el **2** sale un **4**, el *2º* par

$3 \rightarrow \boxed{P} \rightarrow 6$ — si entra el **3** sale un **6**, el *3º* par

¿Qué número has de meter en un transformador y el resultado, a continuación, en el otro para que salga al final **2022**? ¿Y si al final queremos que salga **2023**?

Solución

Basta ir hacia atrás:

- Si queremos que salga al final **2022**, el último transformador será $\boxed{P}$

$$2022 \leftarrow \boxed{P} \leftarrow 1011 \leftarrow \boxed{I} \leftarrow \underline{506}$$

- Si queremos que salga al final **2023**, el último transformador será $\boxed{I}$

$$2023 \leftarrow \boxed{I} \leftarrow 1012 \leftarrow \boxed{P} \leftarrow \underline{506}$$

En ambos casos hay que empezar por 506

Nota.- En general:

$$n \rightarrow \boxed{P} \rightarrow 2n \rightarrow \boxed{I} \rightarrow 4n-1$$

$$n \rightarrow \boxed{I} \rightarrow 2n-1 \rightarrow \boxed{P} \rightarrow 4n-2$$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Carlota Dávila Broseta** (P6-Domus. Godella), **Miguel Puelma Martínez** (INS. La Ferreria. Motcada i Reixac), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Fernando González Vivanco** (Valladolid), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas) y **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia)*

Se recibieron también tres soluciones incompletas y una incorrecta.

Infantil (1º/2º ESO)

I-031. Racional y positivo.

¿Por qué número racional positivo habría que dividir las fracciones $\frac{10}{9}$ y $\frac{8}{7}$ para obtener dos números naturales consecutivos?

Solución

Como $\frac{10}{9} = 1'\overline{1} > \frac{8}{7} = 1,\overline{142857}$, sea $\frac{a}{b}$ el número racional positivo que buscamos.

Así, se ha de cumplir que: $\frac{10}{9} : \frac{a}{b} = n$ y $\frac{8}{7} : \frac{a}{b} = n+1$ con n natural.

Por tanto: $\frac{8 \cdot b}{7 \cdot a} = \frac{10 \cdot b}{9 \cdot a} + 1 \rightarrow \frac{8 \cdot b}{7 \cdot a} - \frac{10 \cdot b}{9 \cdot a} = 1 \rightarrow$

$$\left(\frac{8}{7} - \frac{10}{9}\right) \cdot \frac{b}{a} = 1 \rightarrow \frac{72-70}{63} \cdot \frac{b}{a} = 1 \rightarrow \frac{2}{63} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Luego el racional positivo buscado es: $\underline{\frac{a}{b} = \frac{2}{63}}$ como bien podemos comprobar:

$$\frac{10}{9} : \frac{2}{63} = 5 \cdot 7 = 35 \text{ y } \frac{8}{7} : \frac{2}{63} = 4 \cdot 9 = 36$$

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Moreno Sánchez-Cogolludo** (Sta Mª Expectación. Cuenca), **Miguel Puelma Martínez** (INS. La Ferrería. Motcada i Reixac), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas). **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Fernando González Vivanco** (Valladolid), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **Ainhoa Boeta Serrano** (IES Sierra de Mijas. Las Lagunas de Mijas), **Julia Suárez Torres** (IES Torre Atalaya. Málaga), **David Sánchez Cuenca** (E1-IES Serranía. Alozaina), **Alfonso Gadea** (Valladolid), **José Luis López Palao** (Madrid) y **Pelayo Palacio Pérez** (IES Alpajés. Aranjuez) y **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia)*

Se recibieron también una solución incompleta y cinco incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-031. Sucesión de números naturales.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números enteros positivos, naturales, de la que sabemos que $a_{n+m} = a_n + a_m + nm$ y $a_3 = 6$. ¿Qué vale a_{31}? ¿Y a_n en general?

Solución

$6 = a_3 = a_{2+1} = a_2 + a_1 + 2 \cdot 1 = a_{1+1} + a_1 + 2 = a_1 + a_1 + 1 \cdot 1 + a_1 + 2 = 3a_1 + 3 \rightarrow$

$3a_1 = 3 \rightarrow \underline{a_1 = 1}$ y, también: $a_2 = 3$

Así, comparando al hacer el cálculo siempre con a_1 tenemos:

$$a_{n+1} = a_n + a_1 + n \cdot 1 = a_n + 1 + n \rightarrow a_{n+1} - a_n = n+1 \text{ ó bien } \underline{a_n - a_{n-1} = n}$$

Luego, $\underline{a_{31} = 496}$

$$a_{31} = (a_{31} - a_{30}) + (a_{30} - a_{29}) + \ldots\ldots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 =$$
$$= 31 + 30 + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{32 \cdot 31}{2} = 496$$

Y, en general, $\underline{a_n = n(n+1)/2}$

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) + a_1 =$$
$$= n + (n-1) + \ldots\ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

es decir, a_n es la suma de los n primeros números naturales.

*Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Álvaro Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Miguel Puelma Martínez** (INS. La Ferrería. Motcada i Reixac), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Fernando González Vivanco** (Valladolid), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Adrián Lidón Martí** (IES Mediterráneo. Torrevieja), **Cristina Ceaus** (IES Dunas de las Chapas. Marbella), **Javier Ruiz de Larriva** (Centro Inglés. Puerto de Santa María), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Manuel Gómez Muñoz** (IES Castillo de la Yedra. Cazorla), **Alfonso Gadea** (Valladolid), **José Luis López Palao** (Madrid), **Pelayo Palacio Pérez** (IES Alpajés. Aranjuez), **Weng Weizhe** (Luis Vives. Valencia) y **Antonio García Mulero** (Centro Inglés. Pto Sta María)*

Se recibieron también tres soluciones incompletas y tres incorrectas.

Jv-031. Lujosa valoración.

Prueba con todo lujo de detalles que si $x-7y+3=0$ con $x\in]-3,4[$, entonces:

$$\sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2+8x-2y+17}=5\cdot\sqrt{2}$$

Solución

No es preciso representar la recta $x-7y+3=0$ o, lo que es lo mismo, $x=7y-3$, para ver que si $x\in]-3,4[$, entonces $y\in]0,1[$.

Así, cuadrando las dos expresiones cuadráticas de los radicandos:

$$\begin{aligned}\text{Valor}_{x\in]-3,4[,\,y\in]0,1[} &= \sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2+8x-2y+17}=\\ &=\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=\\ &=\sqrt{(7y-3+3)^2+y^2}+\sqrt{(7y-3-4)^2+(y-1)^2}=\\ &=\sqrt{50\cdot y^2}+\sqrt{50\cdot(y-1)^2}=5\cdot\sqrt{2}\cdot|y|+5\cdot\sqrt{2}\cdot|y-1|=\\ &=5\cdot\sqrt{2}\cdot y+5\cdot\sqrt{2}\cdot(-y+1)=5\cdot\sqrt{2}\end{aligned}$$

Luego, efectivamente, $\underline{\sqrt{x^2+y^2+6x+9}+\sqrt{x^2+y^2-8x-2y+17}=5\cdot\sqrt{2}}$

Fueron varios los resolutores seguidores del Problema del Mes que nos advirtieron rápidamente de la errata del signo en el enunciado y enseguida lo comunicamos por redes sociales.

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Miguel Puelma Martínez*** *(INS. La Ferrería. Motcada i Reixac),* Fernando González Vivanco *(Valladolid),* Clara Navarro Escribá *(IES Ausias March. Manises),* Javier Suárez Godoy *(IES Mesa y López. Las Palmas) y* ***Ángel García Andreu*** *(IES Vicente Andrés Estellés. Burjassot)*

Se recibieron también cinco soluciones incompletas..

Jn-031. Fácil de desigualdad.

Probar que para todo par (a,b) de números reales positivos se cumple:

$$2\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt[3]{b}\geq 5\cdot\sqrt[5]{ab}$$

Solución.

Cierto es muy fácil, basta aplicar la desigualdad de las medias aritmética y geométrica a esas cinco raíces, dos cuadradas y tres cúbicas:

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b}}{5}\geq\sqrt[5]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b}}=\sqrt[5]{ab}$$

Luego: $\underline{2\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt[3]{b}\geq 5\cdot\sqrt[5]{ab}}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Álvaro Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Miguel Puelma Martínez*** *(INS. La Ferrería. Motcada i Reixac),* ***Miguel Sales Cabrera*** *(Grado UA),* ***Fernando González Vivanco*** *(Valladolid),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada),* ***José Luis López Palao*** *(Madrid),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES Alpajés. Aranjuez) y* ***Ángel García Andreu*** *(IES Vicente Andrés Estellés. Burjassot)*

S-031. Integral *partía.*

Calcula la siguiente integral: $\int_0^{+\infty} \frac{\{x\}}{m^{\lfloor x \rfloor}} dx$

donde $\lfloor x \rfloor$ y $\{x\}$ son, respectivamente, la parte entera y decimal de x, y $m \geq 2$

Solución

No se puede calcular directamente esta primitiva debido a que la función a integrar incluye las expresiones parte entera y decimal. Lo que vamos a hacer pues, es dividir la integral en subintervalos de la forma $I_n = [n, n+1]$ con n entero positivo. Y, en cada uno de esos intervalos I_n, se cumple que:

$$\lfloor x \rfloor = n \qquad \{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x - n \qquad m^{\lfloor x \rfloor} = m^n$$

Así, dividimos la integral definida en una suma infinita de integrales definidas. A continuación mostramos todo el proceso:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\{x\}}{m^{\lfloor x \rfloor}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{x-n}{m^n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^n} \int_n^{n+1} (x-n)\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^n} \left[\frac{(x-n)^2}{2} \right]_n^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^n} \left[\frac{1}{2} + 0 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m} \right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m}} = \frac{m}{2m-2}$$

Válidos los últimos pasos por tratarse de una suma convergente, una suma geométrica de razón $1/m$ que, como $m \geq 2$, cumple $|1/m| < 1$

Luego: $\int_0^{+\infty} \frac{\{x\}}{m^{\lfloor x \rfloor}} dx = \frac{m}{2m-2}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA MM. Torre Pacheco),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),****F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Ignacio Larrosa Cañestro*** *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* ***Sergio Sánchez Zufía*** *(Navarra),* ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***Joaquín Cos Córcoles*** *(IES Mediterráneo. Torrevieja),* ***Alejandro Camblor Fernández*** *(IES Rey Pelayo. Cangas de Onis),* ***J Carlos L*** *(Politecmática),* ***Miguel Puelma Martínez*** *(INS. La Ferrería. Motcada i Reixac),* ***Miguel Sales Cabrera*** *(Grado UA),* ***Fernando González Vivanco*** *(Valladolid),* ***José Luis López Palao*** *(Madrid),* ***Larry Andrés Matta Plaza*** *(Sevila),* ***Pelayo Palacio Pérez*** *(IES Alpajés. Aranjuez) y* ***Ángel García Andreu*** *(IES Vicente Andrés Estellés. Burjassot)*