Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Abril-2024

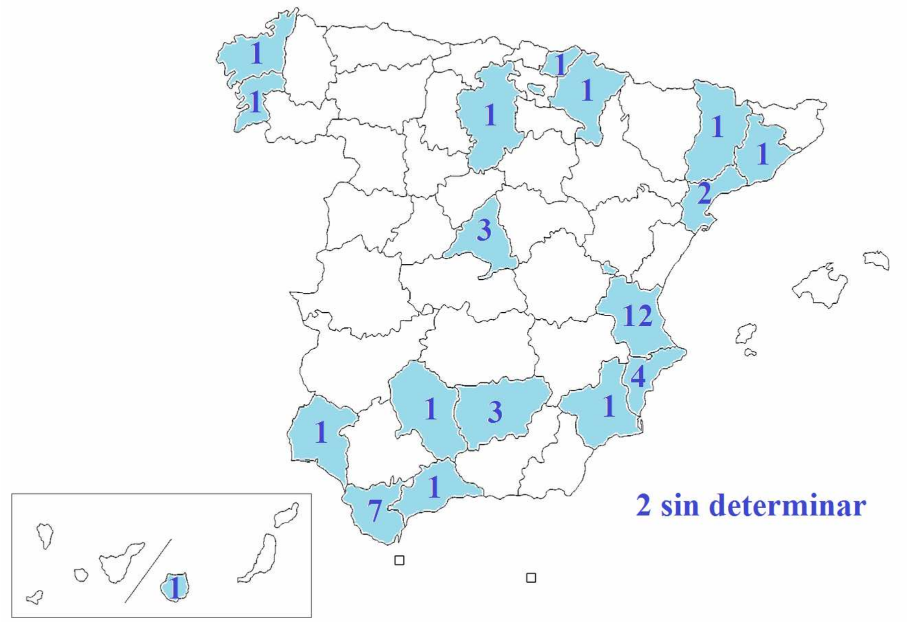
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
042	✓	✓	✓	✓	✓	✓
043	✓	✓	✓	✓	✓	✓
044	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

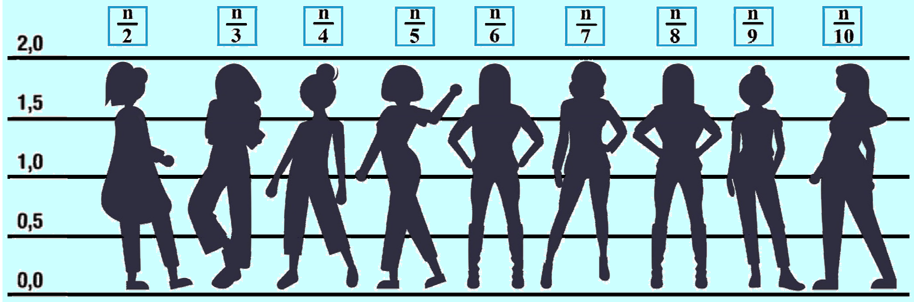
45 participantes (33 chicos / 12 chicas) 89 respuestas



Alevín (5º/6º Primaria)

A-044. Rueda de reconocimiento fraccional.

Los inspectores de la policía anumérica saben que sólo una de estas nueve fracciones se puede simplificar y que sólo tú lo sabes. Fíjate bien, trata de identificarla y argumenta debidamente que así es para que te crean.



Soluciones

· La primera fracción, $\boxed{n/2}$, no puede ser la única simplificable. De serlo, n sería múltiplo de 2 y también se podrían simplificar, $n/4$, $n/6$, $n/8$ y $n/10$. Y lo mismo ocurriría con la tercera, $\boxed{n/4}$, o la séptima, $\boxed{n/8}$. Luego estas tres fracciones descartadas

· La segunda, $\boxed{n/3}$, tampoco. De serlo, n sería múltiplo de 3 y también se podrían simplificar, $n/6$ y $n/9$. Y lo mismo ocurriría con la octava, $\boxed{n/9}$. Luego, dos fracciones más descartadas.

· La cuarta, $\boxed{n/5}$, tampoco. De serlo, n sería múltiplo de 5 y también se podría simplificar, $n/10$

· La quinta, $\boxed{n/6}$, tampoco. De serlo, n sería múltiplo de 2 o de 3 y ya hemos visto que no sería única.

· La novena, $\boxed{n/10}$, tampoco. De serlo, n sería múltiplo de 2 o de 5 y ya hemos visto que no sería única.

Luego, de ser única la fracción simplificable, sólo puede ser $\boxed{n/7}$

Bien resuelto por: Alicia Seijas Vázquez *(IES Chan do Monte. Marín),* Eduard Baticón Purqueras *(Escuela Elisabeth. Salou),* Roger aVinayoles Castell *(Escuela Elisabeth. Salou),* Rubén Musoles Roca *(Villassar de Mar),* Antonio Roberto Martínez Fernández *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba),* Celso de Frutos de Nicolás *(Coslada),* Adrián Burgos Valle *(IES Oleana. Requena),* Samuel Dussart Pedrón *(IES Uno. Requena),* Ana Lozano

Miguel *(IES Uno. Requena)*, Víctor de Gracia García *(IES Uno. Requena)*, Diego Salón Hernández *(IES Uno. Requena)* y Antonio de Gracia García *(IES Uno. Requena)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Infantil (1º/2º ESO)

I-044. Cociente y resto iguales.

Si ordenamos de menor a mayor todos los números que divididos por 44 dejan idéntico cociente y resto, ¿cuál de ellos ocupará el lugar central?

Solución

Los números se obtienen haciendo la prueba a estas cuarenta y tres divisiones, y son sus correspondientes divisores:

$$\begin{array}{c|l} D_1 & 44 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} D_2 & 44 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} D_3 & 44 \\ \hline 3 & 3 \end{array} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad \begin{array}{c|l} D_{43} & 44 \\ \hline 43 & 43 \end{array}$$

Así: $D_1 = 1 \cdot 44 + 1 = 45 \cdot 1$ $\qquad D_2 = 2 \cdot 44 + 2 = 45 \cdot 2$

$D_3 = 3 \cdot 44 + 3 = 45 \cdot 3$ $\qquad D_r = r \cdot 44 + r = 45 \cdot r$ con $r = 1, 2, 3, \ldots \ldots 43$

Luego, el que ocupa el lugar central será: $\underline{D_{22}} = 45 \cdot 22 = \underline{990}$

Bien resuelto por: Alicia Seijas Vázquez *(IES Chan do Monte. Marín)*, Andreu Sanchís Sánchez *(C.Claret. Játiva)*, Fco Antonio de la Asunción Castelló *(IES Playa San Juan)*, Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca)*, Rubén Martínez Mendoza *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada)*, Rubén Musoles Roca *(Villassar de Mar)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Rubén Ortí Pascual *(IES Luis Vives. Valencia)*, Celso de Frutos de Nicolás *(Coslada)*, Adrián Burgos Valle *(IES Oleana. Requena)*, Samuel Dussart Pedrón *(IES Uno. Requena)*, Ana Lozano Miguel *(IES Uno. Requena)*, Víctor de Gracia García *(IES Uno. Requena)*, Diego Salón Hernández *(IES Uno. Requena)* y Antonio de Gracia García *(IES Uno. Requena)*

Cadete (3º/4º ESO)

C-044. Radicales alados.

Sin calculadora y con perspicacia podrás determinar el valor de este radical:

$$\sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot\sqrt{1+36\cdot\sqrt{1+37\cdot\sqrt{1+38\cdot\sqrt{1+39\cdot\sqrt{1+40\cdot\sqrt{1+41\cdot\sqrt{1+42\cdot 44}}}}}}}}}$$

Solución

Llamamos S al resultado de esta enorme operación con nueve radicales.

Es fácil ver que $\sqrt{1+(n-1)\cdot(n+1)} = \sqrt{1+(n^2-1)} = \sqrt{n^2} = n$. Por tanto, aplicando esta propiedad reiteradamente, tenemos:

$$S = \sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot\sqrt{1+36\cdot\sqrt{1+37\cdot\sqrt{1+38\cdot\sqrt{1+39\cdot\sqrt{1+40\cdot\sqrt{1+41\cdot\sqrt{1+42\cdot 44}}}}}}}}} =$$

$$= \sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot\sqrt{1+36\cdot\sqrt{1+37\cdot\sqrt{1+38\cdot\sqrt{1+39\cdot\sqrt{1+40\cdot\sqrt{1+41\cdot 43}}}}}}}} =$$

$$= \sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot\sqrt{1+36\cdot\sqrt{1+37\cdot\sqrt{1+38\cdot\sqrt{1+39\cdot\sqrt{1+40\cdot 42}}}}}}} =$$

$$= \sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot\sqrt{1+36\cdot\sqrt{1+37\cdot\sqrt{1+38\cdot\sqrt{1+39\cdot 41}}}}}} =$$

$$= \sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot\sqrt{1+36\cdot\sqrt{1+37\cdot\sqrt{1+38\cdot 40}}}}} =$$

$$= \sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot\sqrt{1+36\cdot\sqrt{1+37\cdot 39}}}} =$$

$$= \sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot\sqrt{1+36\cdot 38}}} =$$

$$= \sqrt{1+34\cdot\sqrt{1+35\cdot 37}} =$$

$$= \sqrt{1+34\cdot 36} =$$

$$= 35$$

Bien resuelto por: Alberto Romero *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, Alicia Seijas Vázquez *(IES Chan do Monte. Marín)*, Carlota Braza Bernal *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, Constanza Ibáñez *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, Eduard Baticón Purqueras *(Escuela Elisabeth. Salou)*, Elena Gómez Cáceres *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, Francisco Antonio de la Asunción Castelló *(IES Playa de San Juan. Alicante)*, Germán Beardo Santos, Iván López Márquez *(C. Inmaculada. Alicante)*, José Mangas Toro *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, Juan Romero Cussen *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca)*, Margarita Ragel Castilla *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, Roger Vinyoles Castell *(Escuela Elisabeth. Salou)*, Rubén Musoles Roca *(Villassar de Mar)*, Antonio Roberto Martínez Fernández *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco)*, David Ortí Pascual *(IES Luis Vives. Valencia)*, Andrea Silvestre Bort *(IES Luis Vives. Valencia)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Berta Lorenzo Berenguer *(IES Luis Vives. Valencia)*, Inés Moral Víllora *(IES Luis Vives. Valencia)*, Rubén Ortí Pascual *(IES Luis Vives. Valencia)*, Ana Sánchez Espinosa *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada)*, Celso de Frutos de Nicolás *(Coslada)*, Ana Lozano Miguel *(IES Uno. Requena)*, Víctor de Gracia García *(IES Uno. Requena)*, Diego Salón Hernández *(IES Uno. Requena)*, Antonio de Gracia García *(IES Uno. Requena) y* Nacho Gracia López *(2º Estalmat-CV)*

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-044. Mago adivino

Un mago desea realizar el siguiente truco.

Pide a un espectador dado que piense un número natural n con exactamente cuatro divisores positivos $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ y que le diga el valor de la suma $S = \frac{d_1}{d_4} + \frac{d_2}{d_3}$.

El mago intentará adivinar el valor de n.

Si el espectador informa que $S = \frac{10}{37}$, ¿cuánto vale n?

Solución

Sabemos que los números naturales con cuatro divisores son necesariamente de la forma $n = p^3$, con p primo, o bien $n = pq$, con p y q primos distintos.

Veamos cuánto vale S en cada caso.

(I) Si $\underline{n = p^3}$, sus divisores son $1 < p < p^2 < p^3$, y se tiene $S = \frac{1}{p^3} + \frac{p}{p^2} = \frac{1+p^2}{p^3}$

Nótese que esta expresión es siempre irreducible. En particular, no puede ser igual a $10/37$, fracción irreducible con denominador primo.

Luego, el espectador no ha podido elegir un número de la forma $n = p^3$.

(II) Si $\underline{n = pq}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p < q$, luego los divisores de n son $1 < p < q < pq$, por tanto $S = \frac{1}{pq} + \frac{p}{q} = \frac{1+p^2}{pq}$

En este caso el numerador $1+p^2$ no es nunca múltiplo de p, por lo que el factor primo p no puede desaparecer del denominador, pero sí podría ocurrir que $1+p^2$ fuera múltiplo de q, es decir $1+p^2 = kq$, entonces se podría simplificar $S = \frac{1+p^2}{pq} = \frac{kq}{pq} = \frac{k}{p}$

Ahora bien, dado que $10/37$ es irreducible y 37 es primo, sabemos que se ha producido una simplificación. Uno de los factores primos de n es $p = 37$, y el factor oculto del otro primo q se deduce de la siguiente manera:

$$\frac{1+37^2}{37q} = \frac{10}{37} \quad \rightarrow \quad q = \frac{1+37^2}{10} = 137$$

de donde concluimos que $\underline{n = 37 \cdot 137 = 5069}$

Bien resuelto por: Alicia Seijas Vázquez *(IES Chan do Monte. Marín)*, Cesc Folch Aldehuelo *(IES de Tremp.)*, Eduard Baticón Purqueras *(Escuela Elisabeth. Salou)*, Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca)*, Kaihao Luis Wu *(C. Entrepinos. Huelva)*, Miguel García Azcarreta *(Col. Nuestra Señora de las Nieves. Madrid)*, Roger Vinyoles Castell *(Escuela Elisabeth. Salou)*, Rubén Musoles Roca *(Villassar de Mar)*, Antonio Roberto Martínez Fernández *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Berta Lorenzo Berenguer *(IES Luis Vives. Valencia)*, Cristina Ceaus *(IES Victoria Kent. Marbella)*, Ana Sánchez Espinosa *(IES Villa de Stgo. Stgo Espada) y* Antonio de Gracia García *(IES Uno. Requena)*

Se recibieron también cinco soluciones incorrectas.

Júnior

Jn-044. Enesietes.

Jugando con la calculadora en un momento dado, Carla observa que $6^5 = 7776$.

¿Qué otras potencias de 6 nos dan como resultado un llamativo y curioso número formado por n dígitos 7 seguidos de un 6, esto es, de la forma $\underbrace{777\ldots\ldots77}_{n \text{ sietes}}6$?

Solución

Partimos del siguiente hecho conocido, de demostración inmediata: el número formado por n unos consecutivos se escribe como $\frac{10^n - 1}{9}$.

Por tanto, el número que tiene $n+1$ sietes se puede escribir como $\frac{7(10^{n+1}-1)}{9}$

Y, en este problema, debemos determinar con qué números enteros positivos k y n se puede conseguir que $\underline{6^k = \frac{7(10^{n+1}-1)}{9} - 1}$ además de la solución ya conocida para $k = 5$ y $n = 3$.

Eliminando denominadores y reordenando términos, la igualdad anterior es equivalente a: $\underline{7\cdot 10^{n+1}-9\cdot 6^{k}=16}$

- Puesto que las bases 6 y 10 de esas dos potencias son pares, cuando sus exponentes $n+1$ y k son ambos mayores o iguales que 5, $n+1\geq 5$ y $k\geq 5$, se llega a una contradicción:

  el término izquierdo resulta ser múltiplo de $2^5=32$ y el derecho, no.
- Para $k\leq 4$ se comprueba que ningún valor sirve, ya que

  $$6^1=6 \qquad 6^2=36 \qquad 63=216 \quad \text{y} \quad 6^4=1296$$
- Para $k=5$ se obtiene la solución ya conocida con $n=3$.
- Finalmente, si $k\geq 6$ tenemos que $16+9\cdot 6^k\geq 16+9\cdot 6^6=419920>7\cdot 10^4$, por lo cual no puede ser $n+1\leq 4$ y debe cumplirse que $n+1\geq 5$, situación ya estudiada.

En consecuencia, <u>no hay más potencias de 6 que cumplan la condición pedida</u>. El curioso fenómeno observado por Carla no vuelve a repetirse.

Bien resuelto por: Alicia Seijas Vázquez *(IES Chan do Monte. Marín)*, Cesc Folch Aldehuelo *(IES de Tremp)*, Henry Díaz Bordón *(IES Vecindario. Las Palmas)*, José Antonio Rama López *(Santiago de Compostela) y* Antonio de Gracia García *(IES Uno. Requena)*

Sénior

S-044. Bitecleando con la calculadora.

Mi calculadora, en la que tras encender introduzco el número 2024 para que se vea en pantalla, tiene dos peculiares teclas, $\boxed{\sqrt{x+1}}$ y $\boxed{(x-1)^2}$, que realizan las operaciones indicadas cuando reciben un número x.

Prueba que para cualquier entero $n>0$ es posible realizar una secuencia de pulsaciones de esas dos teclas que fiinalice con un número x tal que $n\leq x<n+1$.

<u>Solución</u>

Para alcanzar cualquier intervalo de la forma $[n,\ n+1[$, esto es, entre dos números naturales consecutivos, la estrategia será la siguiente:

a) Primero, de ser preciso, *"nos pasamos"*: tras el encendido y la introducción del número de partida, siempre podremos, pulsando cuantas veces sea necesario la tecla $(x-1)^2$, obtener un número x en cierto intervalo $[N,\ N+1[$, con $N>n$.

b) Luego disminuyamos x hasta alcanzar el intervalo deseado.

Notemos que pulsando las teclas segunda y primera, en ese orden, se obtiene el número $y=\sqrt{(x-1)^2+1}$.

Mientras sea $x>1$, se tiene que $x-1<y<x$, es decir, x se reemplazará por otro número menor, que dista de él menos de 1. Además, si $x>2$, la diferencia $x-y$ será, al menos, $1/2$.

En efecto: $$x-y=\frac{(x-y)(x+y)}{x+y}=\frac{x^2-y^2}{x+y}=\frac{2x-2}{x+y}>\frac{2x-2}{2x}>\frac{1}{2}$$

donde se ha utilizado que $x^2-y^2=2x-2$, junto con la acotación $x>y$. Así pues, $1/2<x-y<1$ siempre que $x>2$.

Al ser los saltos hacia atrás mayores que $1/2$ y menores que 1, en uno o dos saltos pasaremos del intervalo $[N,\ N+1[$ al $[N-1,\ N[$, tras uno o dos saltos más llegaremos a $[N-2,\ N-1[$, y así sucesivamente iremos alcanzando todos los intervalos menores, sin saltarnos ninguno, hasta llegar al intervalo $[2,3[$.

Si $n\geq 2$, durante el proceso anterior habrá aparecido necesariamente en la pantalla un número x en el intervalo $[n,\ n+1[$, como queríamos probar.

Quedan por analizar únicamente los casos $n=1$ y $n=0$, es decir, ver cómo alcanzar los intervalos $[1,2[$ y $[0,1[$.

Por todo lo argumentado anteriormente, podemos suponer que hemos obtenido un valor x cumpliendo $2\leq x<3$. Entonces pulsando la tecla $\sqrt{x+1}$ tenemos $y=\sqrt{x+1}\in[1,2[$ y, de precisarse, a continuación pulsando la otra tecla conseguimos $z=(y-1)^2\in[0,1[$

Bien resuelto por: Cesc Folch Aldehuelo *(IES de Tremp)*, Fco Antonio de la Asunción Castelló *(IES Playa de San Juan)*, Henry Díaz Bordón *(B1-IES Vecindario. Las Palmas)*, Miguel Ángel Ingelmo Benito *(IES JS. Arganda del Rey) y* Tim Bao *(Kings College. Alicante)*

Se recibieron también una solución incompleta y otra incorrecta.