Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Mayo-2024

Soluciones

Alevín (5º/6º Primaria)

A-045. Suman cuarenta y cinco.

Juanito ha escrito, ocultos en un papel, cuatro números en orden creciente que suman cuarenta y cinco. Y nos dice que sabiendo que el segundo es el doble del primero; que el tercero es el triple de la suma de los dos anteriores y que el cuarto es el cuádruplo de la suma de los tres anteriores, tenemos datos más que suficientes para poder averiguar cuáles son esos cuatro números. ¿Seguro que podemos? Si es que sí, indica cuáles son esos números y, si es que no, justifica bien porqué.

Solución

Si el primer número escrito por Juanito hubiera sido el uno, tendríamos:

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
1	$2\cdot 1=2$	$3\cdot(1+2)=9$	$4(1+2+9)=48$

cuatro números que suman 60.

Pero conociendo la proporción entre ellos $1:2:9:48$, es fácil regularlos para que la suma sea exactamente 45:

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
$1\cdot\frac{45}{60}$	$2\cdot\frac{45}{60}$	$9\cdot\frac{45}{60}$	$48\cdot\frac{45}{60}$
$\frac{3}{4}=\underline{0'75}$	$\frac{6}{4}=\underline{1'5}$	$\frac{27}{4}=\underline{6'75}$	$\frac{144}{4}=\underline{36}$

Bien resuelto por: Adrián Burgos Valle *(IES Oleana. Requena),* Ana Lozano Miguel *(IES Uno. Requena),* Antonio Roberto Martínez Fernández *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* Diego Salón Hernández *(IES Uno. Requena),* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba),* Fernando González Vivanco *(Valladolid),* Francisco Burgos Valle *(IES Oleana. Requena),* Francisco J. Babarro Rodríguez *(Ourense),* Hugo Hernández Climent *(IES Oleana. Requena),* Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca),* Leonor Sandu *(IES Playa San Juan. Alicante),* Marcos López Martín *(IES Playa San Juan. Alicante),* Samuel Dussart Pedrón *(IES Uno. Requena),* Alberto Rodrigo García *(IES Torre de los Espejos. Utebo),* Andrés Gutiérrez Bonete *(IES Playa San Juan. Alicante),* Carlos Picazo *(IES Playa San Juan. Alicante),* Daniel Picazo Arias *(IES Playa San Juan. Alicante),* David Sánchez Cuenca *(IES Serranía. Alozaina),* Elisa *(CIMª Montesori. Málaga),* Inés Lozano Cabrera *(IES Playa San Juan. Alicante),* Laura García Robles *(IES Villa de Santiago. Santiago Espada),* Rubén Martínez Mendoza *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada),* Teo Vaquero García *(IES Playa San Juan. Alicante) y* Aitana Navarro Roger *(IES Playa de San Juan)*

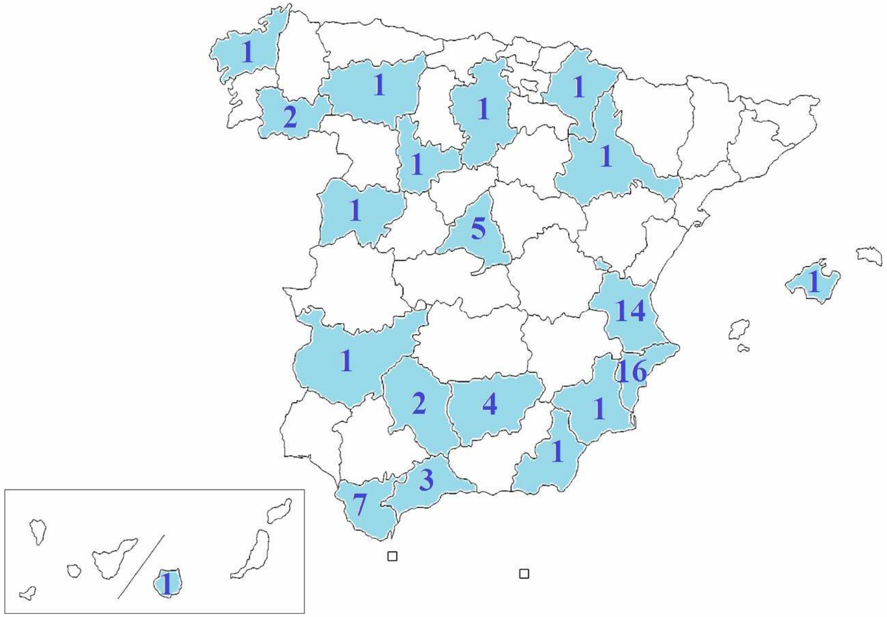
Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
043	✓	✓	✓	✓	✓	✓
044	✓	✓	✓	✓	✓	✓
045	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

115 respuestas de 65 participantes (48 chicos / 17 chicas)



Infantil (1º/2º ESO)

I-045. Restricciones en el servicio postal.

En estos momentos, nuestro servicio postal solo permite franquear cartas y paquetes con sellos de 4, 10 y 21 €. ¿Cuál es el importe de mayor valor en euros que no se puede alcanzar con estas limitaciones?

Solución

Hemos de ver qué precios exactos p podemos conseguir franquear usando x sellos de 4 €, y de 10 € y z de 21 €, esto es, buscar soluciones enteras positivas de la ecuación: $4x+10y+21z=p$. Tanteando con cierta sistematicidad:

x	y	z	$4\cdot x+10\cdot y+21\cdot z=p$	
1	0	0	$4\cdot 1+10\cdot 0+21\cdot 0=4$	
2	0	0	$4\cdot 2+10\cdot 0+21\cdot 0=8$	
3	0	0	$4\cdot 3+10\cdot 0+21\cdot 0=12$	
n	0	0	$4\cdot n+10\cdot 0+21\cdot 0=\underline{4n}$	Todos los precios múltiplos de 4 se pueden
0	1	0	$4\cdot 0+10\cdot 1+21\cdot 0=10$	
1	1	0	$4\cdot 1+10\cdot 1+21\cdot 0=14$	
2	1	0	$4\cdot 2+10\cdot 1+21\cdot 0=18$	
3	1	0	$4\cdot 3+10\cdot 1+21\cdot 0=22$	
$n-2$	1	0	$4(n-2)+10\cdot 1+21\cdot 0=\underline{4n+2}$ con $n\geq 2$	Todos los precios múltiplos de 4 más 2 *(menos 2 y 6)* se pueden
0	0	1	$4\cdot 0+10\cdot 0+21\cdot 1=21$	
1	0	1	$4\cdot 1+10\cdot 0+21\cdot 1=25$	
2	0	1	$4\cdot 2+10\cdot 0+21\cdot 1=29$	
3	0	1	$4\cdot 3+10\cdot 0+21\cdot 1=33$	
$n-5$	0	1	$4(n-5)+10\cdot 0+21\cdot 1=\underline{4n+1}$ con $n\geq 5$	Todos los precios múltiplos de 4 más 1 *(menos 1, 5, 9, 13 y 17)* se pueden
0	1	1	$4\cdot 0+10\cdot 1+21\cdot 1=31$	
1	1	1	$4\cdot 1+10\cdot 1+21\cdot 1=35$	
2	1	1	$4\cdot 2+10\cdot 1+21\cdot 1=39$	
3	1	1	$4\cdot 3+10\cdot 1+21\cdot 1=43$	
$n-7$	1	1	$4(n-7)+10\cdot 1+21\cdot 1=\underline{4n+3}$ con $n\geq 7$	Todos los precios múltiplos de 4 más 3 *(menos 3, 7, 11, 15, 19, 23 y 27)* se pueden

En definitiva, no se pueden franquear ni cartas ni paquetes que tengan en euros alguno de estos catorce precios: de 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23 y 27. Por tanto, éste último, <u>27 euros</u>, será el mayor valor en euros que no se puede conseguir con las limitaciones que, en estos momentos, tiene el servicio postal.

Bien resuelto por: **Ana Lozano Miguel** *(IES Uno. Requena),* **Antonio Roberto Martínez Fernández** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* **Celso de Frutos de Nicolás** *(Coslada),* **Diego Salón Hernández** *(IES Uno. Requena),* **Fernando González Vivanco** *(Valladolid),* **Francisco Burgos Valle** *(IES Oleana. Requena),* **Hugo Hernández Climent** *(IES Oleana. Requena),* **Joaquín Beltrán Ruiz** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María),* **Alberto Rodrigo García** *(IES Torre de los Espejos. Utebo),* **Elisa** *(CIMª Montesori. Málaga),* **Laura García Robles** *(IES Villa de Stgo. Stgo Espada),* **Miguel Soriano Vergara** *(IES Playa San Juan. Alicante),* **Pablo Freire Fernández** *(IES As Lagoas. Orense) y* **Rubén Martínez Mendoza** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada)*

Se recibieron también cuatro soluciones incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-045. Pares (m, n) de números enteros.

Comprueba que el conjunto de pares de números enteros que cumple la relación $2mn-3m+5n=7$ es exactamente el mismo que el conjunto de pares de números enteros que cumple la relación $3mn-5m+7n=11$.

Solución

De la primera igualdad, $2mn-3m+5n=7$, se desprende que $m(2n-3)=7-5n$ y como $n\neq 3/2$, pues $n\in Z$, dividiendo: $m=\dfrac{7-5n}{2n-3}\in Z$

El doble también será entero: $2m=\dfrac{14-10n}{2n-3}=-5-\dfrac{1}{2n-3}\in Z$, lo que exige que $2n-3=\pm 1$, esto es, $n=2$ o $n=1$

Y substituyendo, lleva a $m=-3$ y $m=-2$ respectivamente.

Los pares que cumplen la primera relación son: $\underline{(-3,2)}$ y $\underline{(-2,1)}$

Y, análogamente, de $3mn-5m+7n=11$ se desprende que $m(3n-5)=11-7n$ y, lo mismo, como $n\neq 5/3$, pues $n\in Z$, dividiendo: $m=\dfrac{11-7n}{3n-5}\in Z$

El triple también será entero: $3m=\dfrac{33-21n}{3n-5}=-7-\dfrac{2}{3n-5}\in Z$, lo que exige que o bien, $3n-5=\pm 1$, esto es, $n=2$ o $n=-4/3$ que no es entero, o bien $3n-5=\pm 2$, esto es, $n=7/3$ que no es entero o $n=1$

Y substituyendo, lleva también a $m=-3$ y $m=-2$ respectivamente.

Los pares que cumplen la segunda relación son: $\underline{(-3,2)}$ y $\underline{(-2,1)}$

Luego, efectivamente, <u>los pares que cumplen ambas relaciones son los mismos</u> c.q.d.

Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* **David Ortí Pascual** *(IES Luis Vives. Valencia),* **Diego Salón Hernández** *(IES Uno. Requena),* **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba),* **Fernando González Vivanco** *(Valladolid),* **Francisco Burgos Valle** *(IES Oleana. Requena),* **Francisco J. Babarro Rodríguez** *(Ourense) y* **Pablo Freire Fernández** *(IES As Lagoas. Orense)*

Se recibieron también once soluciones incompletas y siete incorrectas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-045. Sistema por cuestión.

Determina todos los valores reales de x, y, z para los cuales:

$$\begin{aligned} x^3 + x &= 2yz \\ y^3 + y &= 2zx \\ z^3 + z &= 2xy \end{aligned}$$

Solución

Algunas soluciones particulares se aprecian a simple vista, como por ejemplo: $\underline{x = y = z = 0}$ ó $\underline{x = y = z = 1}$

¿Habrá más soluciones con $x = y = z$?

No, pues tendríamos que resolver tres veces la misma ecuación cúbica: $x^3 + x = 2x^2 \quad \rightarrow \quad 0 = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$ que conduce a $x = 0$ y $x = 1$, soluciones ya detectadas.

Otro caso particular a considerar ocurre cuando una variable es nula.

Si $x = 0$, la segunda y tercera ecuación se escriben: $y^3 + y = 0$ y $z^3 + z = 0$ que, factorizadas, $y(y^2+1) = 0$ y $z(z^2+1) = 0$ llevan a $y = z = 0$.

Y, análogamente en los demás casos: una variable nula cualquiera obliga, como hemos visto, a que las otras dos también lo sean.

A partir de ahora supongamos que ninguna variable es nula.

Despejando z en la primera y segunda ecuación, tenemos: $z = \dfrac{x^3 + x}{2y} = \dfrac{y^3 + y}{2x}$

$\rightarrow \quad x^4 + x^2 - y^4 - y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + 1) = 0$. Y, puesto que el segundo factor es siempre estrictamente positivo, debe ser $x^2 - y^2 = 0$, esto es, $y = x$ o $y = -x$

Repitiendo el mismo razonamiento con la primera y la tercera ecuación, se llegaría a que $z = x$ o $z = -x$

En consecuencia, la primera ecuación en función de x quedará $x^3 + x = 2x^2$ o bien $x^3 + x = 2x^2$. Y excluyendo el caso $x = 0$ ya considerado, las posibilidades que quedan son solamente $x = 1$ ó $x = -1$

Y, análogamente, las otras variables y, z también valen 1 ó -1.

Y, finalmente, combinando los valores 1 ó -1, se comprueba que las únicas soluciones aún no consideradas, vienen dadas por las ternas:

$$(x,y,z) \equiv (1,-1,-1) \qquad \underline{(x,y,z) \equiv (-1,1,-1)} \qquad \underline{(x,y,z) \equiv (-1,-1,1)}$$

Bien resuelto por: **Antonio Roberto Martínez Fernández** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* **David Guardiola Ortiz** *(Torredonjimeno),* **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba),* **Fco Antonio de la Asunción Castelló** *(IES Playa San Juan),* **Francisco Burgos Valle** *(IES Oleana. Requena),* **Henry Díaz Bordón** *(IES Vecindario. Las Palmas),* **Julio J. Zárate Pinto** *(IES La Bureba. Briviesca),* **Alberto Rodrigo García** *(IES Torre de los Espejos. Utebo),* **Alejandro Pallarés Valiente** *(Col. Nª Sseñora de las Nieves. Madrid),* **Ana Sánchez Espinosa** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada),* **David Ortí Pascual** *(IES Luis Vives. Valencia)* y **Javier Ruiz de Larriva** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*

Se recibieron también seis soluciones incompletas.

Júnior

Jn-045. Uno más en la fila.

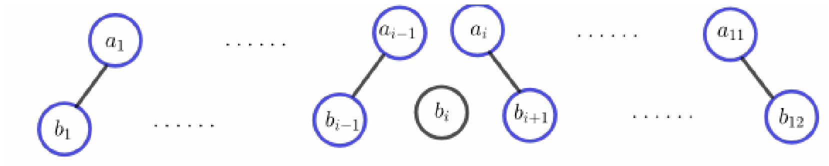
En una fila hay 11 números enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ cuya suma es 2023. Se construyen 12 números $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ de la siguiente manera: $b_1 = a_1$, $b_{12} = a_{11}$ y $b_i = \text{máx}\{a_{i-1}, a_i\}$ para cada $i = 2, \ldots, 11$.

Determina el menor valor posible que puede alcanzar la suma $b_1 + b_2 + \ldots + b_{12}$.

Solución

Sean las sumas $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{11} = 2023$ y $B = b_1 + b_2 + \ldots + b_{11} + b_{12}$, y sea $M = \text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$. Demostraremos que $B - A \geq M$.

Dado que M también es el máximo de los números $\{b_1, b_2, \ldots, b_{11}, b_{12}\}$, es suficiente probar que $B - A \geq b_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 12$. Para ello, sea i un entero tal que $1 \leq i \leq 12$. Formaremos parejas entre los a's y los b's, de manera que cada b es mayor o igual que su compañero a, y queda sin emparejar el elemento b_i, como se ilustra en la siguiente figura:



Cuando $i = 1$, la mitad izquierda de la figura no aparece, mientras que si $i = 12$ es la mitad derecha la que desaparece.

Ahora bien, puesto que $b_1 \geq a_1$, …, $b_{i-1} \geq a_{i-1}$, …, $b_{i+1} \geq a_i$, …, $b_{12} \geq a_{11}$, es inmediato que $B - A \geq b_i$. El razonamiento anterior vale para todo i, por lo que podemos confirmar que $B - A \geq M$, como habíamos conjeturado.

Por lo tanto, el problema estará resuelto si hallamos el menor valor posible para M.

Nótese que $183 \cdot 11 = 2013 < 2023 < 184 \cdot 11 = 2024$. Esto implica que $M \geq 184$. Se tiene entonces que $B \geq A + M \geq 2023 + 184 = 2207$.

Para finalizar, veamos que el caso límite $\underline{B = 2207}$ es alcanzable.

Si los once a's valen 183, 184, 184, … …, 184, es claro que los doce b's son 183, 184, 184, … …, 184, 184, por lo que la suma ha aumentado exactamente en 184, valiendo 2207.

Bien resuelto por: David Guardiola Ortiz *(Torredonjimeno),* Fernando González Vivanco *(Valladolid),* Henry Díaz Bordón *(IES Vecindario. Las Palmas),* Berta Lorenzo Berenguer *(IES Luis Vives. Valencia) y* Pablo Freire Fernández *(IES As Lagoas. Orense)*

Se recibieron también cinco soluciones incorrectas.

Sénior

S-045. Entre cubos.

Resuelve en números enteros la ecuación $x^3 - y^3 = xy + 61$

Solución

Multiplicando por 27: $27x^3 - 27y^3 = 27xy + 1647$ y manipulando:

$$27x^3 - 27y^3 - 1 - 27xy = 1646$$

$$(3x)^3 + (-3y)^3 + (-1)^3 - 3(3x)(-3y)(-1) = 1646$$

Haciendo uso de esta conocida descomposición:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$ tenemos:

$$(3x - 3y - 1)(9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy - 3y - 3x) = 2 \cdot 823$$

Al ser x e y enteros y como 823 es primo, sólo puede ser:

$$3x - 3y - 1 = 2 \quad \text{y} \quad 9x^2 + 9y^2 + 1 + 9xy - 3y + 3x = 823$$

De la primera: $3x - 3 = 3 \rightarrow \underline{x - y = 1} \rightarrow x^2 + y^2 = 1 + 2xy$

Y de la segunda: $9x^2 + 9y^2 + 9xy + 3(x - y) = 822 \rightarrow$

$$9 + 18xy + 9xy + 3 = 822 \rightarrow 27xy = 810 \rightarrow \underline{xy = 30}$$

Finalmente, resolviendo el sistema que forman las dos expresiones que hemos subrayado, se obtienen estas dos soluciones: $\underline{x = 6}$ e $\underline{y = 5}$ y $\underline{x = -5}$ e $\underline{y = -6}$

Bien resuelto por: David Ortí Pascual *(IES Luis Vives. Valencia),* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba),* Francisco Antonio de la Asunción Castelló *(IES Playa San Juan),* Fernando González Vivanco *(Valladolid),* Fernando Martín Gil *(León),* Francisco M. Morales Sorroche *(Almería),* Francisco Merchán Cid *(IES La Vaguada de la Palma),* José Antonio Rama López *(Santiago de Compostela),* José Luis Barrera Miñarro *(Córdoba),* Miguel Ángel Ingelmo Benito *(IES JS. Arganda del Rey),* Sebastià Roig Obrador *(Islas Baleares),* Sergio Sánchez Zufía *(Navarra) y* Pablo Freire Fernández *(IES As Lagoas. Orense)*

Se recibió también una solución incorrecta.