Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Junio-2024

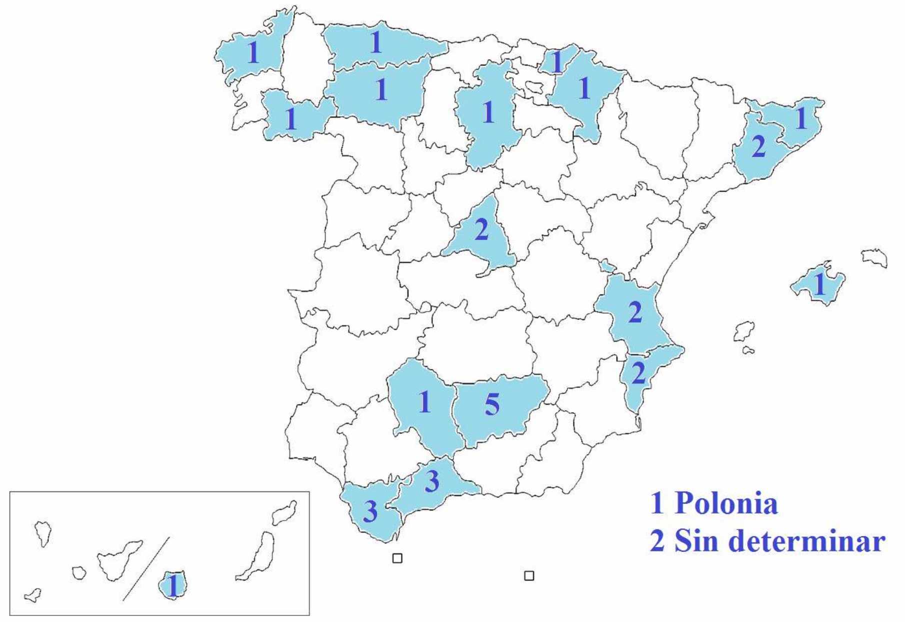
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
044	✓	✓	✓	✓	✓	✓
045	✓	✓	✓	✓	✓	✓
046	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

54 respuestas de 33 participantes (27 chicos / 6 chicas)

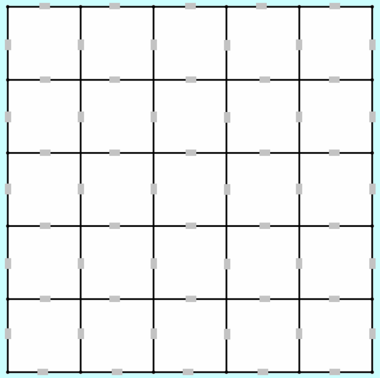


Alevín (5º/6º Primaria)

A-046. De visita por palacio.

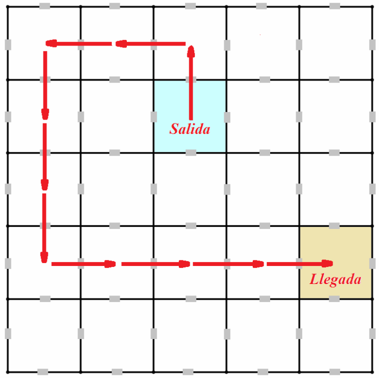
Cuando el guía reunió al grupo en la estancia noble de los artesonados, lo que más le llamó la atención a Maite fue oírle decir que, como mostraba el plano turístico, el palacio era todo un laberinto. Así que, precavida ella, a partir de ese momento, con ayuda de la brújula digital de su móvil, fue anotando el recorrido que iban haciendo hasta el gabinete de las antiguas porcelanas chinas donde se encontraban ahora: **NOOSSSEEEE**.

¿Qué otro camino más corto podría haber seguido Maite para ir de la estancia noble de los artesonados al gabinete de las porcelanas?

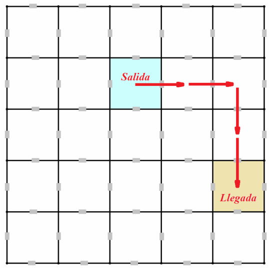


Solución

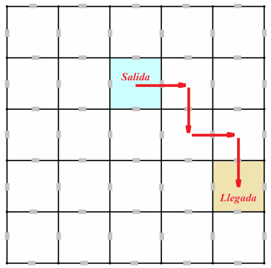
Aunque lo tracemos, no es preciso un dibujo del recorrido desde la estancia de los artesonados hasta el gabinete de las antiguas porcelanas chinas para dar la respuesta. Obsérvese que la larga palabra anotada por Maite lleva una **N** y tres e**S**es, lo que quiere decir que la sala de las porcelanas está dos filas más al sur que la de los artesonados. Y, análogamente, si la palabra lleva dos **O**es y cuatro **E**s, las sala de las porcelanas se encontrarán dos columnas más al este que la de los artesonados.



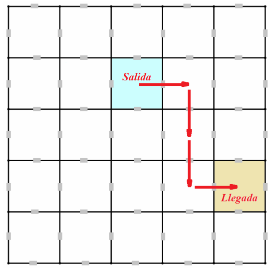
Por tanto, cualquier palabra con dos eses y dos es nos dará una forma de hacer el camino más corto entre una sala y otra del palacio. Por orden alfabético, cualquiera de estas seis posibilidades valdría para indicar el camino más corto entre la sala de los artesonados y la de las porcelanas chinas:



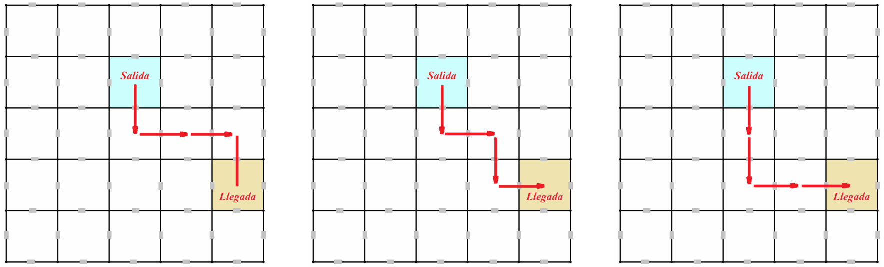
EESS



ESES



ESSE



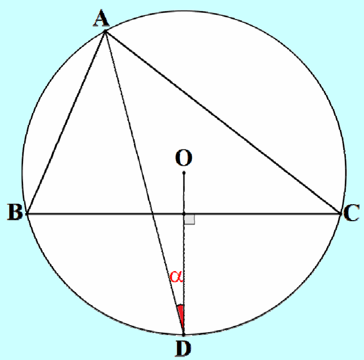
SEES SESE SSEE

Bien resuelto por: **Celso de Frutos de Nicolás** *(Coslada),* **Diego Arias Díaz** *(Estalmat CV),* **Lucas Ferrandis del Agua** *(C. San Pedro Pascual. Valencia),* **Rubén Martínez Mendoza** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada),* **Sofía** *(Matadepera),* **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba) y* **Laura García Robles** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada)*

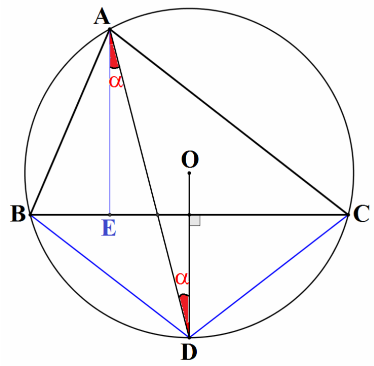
Infantil (1º/2º ESO)

I-046. Un alfa desconocido.

Observa bien la figura, analiza cómo se han delineado todos sus detalles y determina el valor del ángulo ensombrecido α en función de los ángulos del triángulo ABC.



Solución



- Sea **E** el punto del lado **BC** pie de la altura del triángulo trazada desde el vértice **A**. Así, las líneas **AE** y **OD** son paralelas por ser ambas perpendiculares a **BC** y, como la recta **AD** las corta a las dos, resultan iguales los ángulos $\alpha = \angle ADO = \angle DAE$.
- El punto **D** de la circunferencia está en la mediatriz del lado **BC**, por tanto, dista lo mismo de **B** y **C**, esto es, $BD = DC$. Así, $\angle BAD = \angle DAC$ por ser ángulos inscritos a la circunferencia que subtienden cuerdas de igual longitud. Luego, **AD** es bisectriz del ángulo $\hat{A}$.
- Finalmente, como **AEB** y **AEC** son triángulos rectángulos:

$$\hat{A}/2 = \angle BAD = \angle BAE + \angle EAD = (90^\circ - \hat{B}) + \alpha \quad \text{y}$$

$$\hat{A}/2 = \angle DAC = \angle EAC - \angle EAD = (90^\circ - \hat{C}) - \alpha$$

- Con todo, igualando y simplificando:

$$\angle BAD = (90^\circ - \hat{B}) + \alpha = (90^\circ - \hat{C}) - \alpha = \angle DAC \quad \rightarrow \quad 2\alpha = \hat{B} - \hat{C} \quad \rightarrow$$

Luego, $\alpha = \dfrac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$

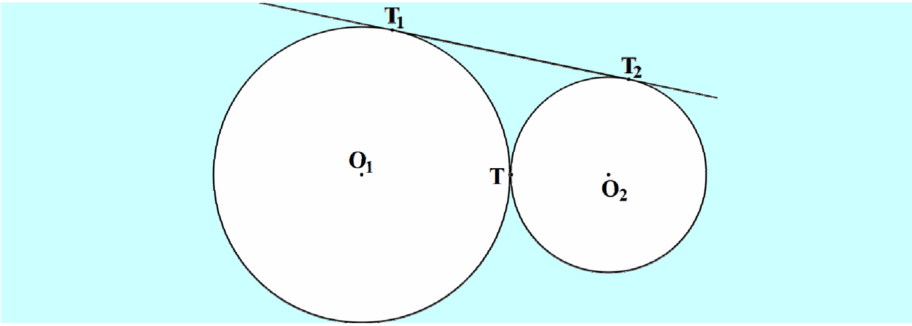
Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba),* **Francisco Antonio de la Asunción Castelló** *(IES Playa San Juan),* **Laura García Robles** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada) y* **Rubén Martínez Mendoza** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada)*

Se recibió también una solución incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

C-046. Cuestionotes.

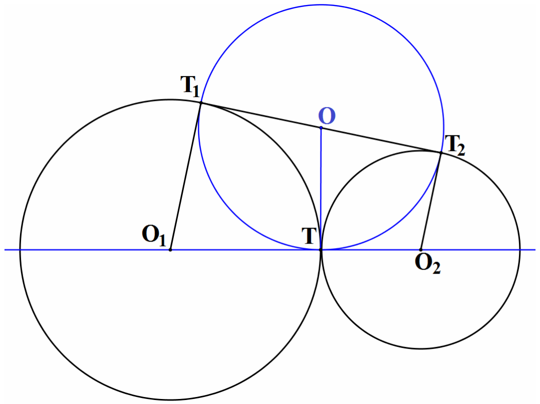
Como muestra la figura, sean O_1 y O_2 los centros de dos circunferencias tangentes exteriores en un punto T y T_1 y T_2 los puntos de contacto de una recta tangente exterior común a ambas. Demostrar que la circunferencia de diámetro T_1T_2 es tangente a la recta que une los centros O_1O_2 en el punto de contacto T de ambas circunferencias.



Solución

El punto medio del segmento T_1T_2, llamémosle O, es el centro de la circunferencia de diámetro T_1T_2.

Trazando desde O tangentes exteriores a las circunferencias de centros O_1 y O_2 se tienen los segmentos tangentes a la primera, OT_1 y OT de igual longitud, y los segmentos tangentes a la segunda, OT_2 y OT también de igual longitud.



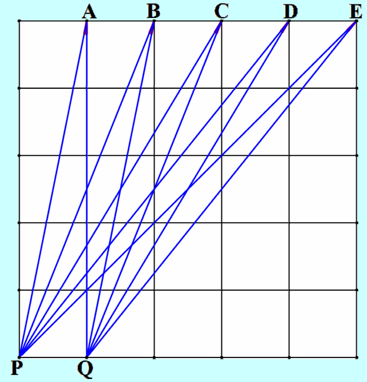
El segmento OT es de la tangente común a ambas circunferencias, por tanto, perpendicular respectivamente a los radios O_1T y O_2T y, en consecuencia, a la línea que une los centros O_1 y O_2 c.q.d.

Bien resuelto por: Celso de Frutos de Nicolás *(Coslada)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Joaquín Nadal Vidal *(Llagostera)*, Mauro Masiá Nimo *(C Inglés. Puerto de Santa María)* *y* Oier Aizpurua *(C Zumaiena. Zumaia)*

Jv-046. Ángulos ruborizados.

¿Cuánto mide la suma de estos cinco ángulos que en la figura se muestran ligeramente enrojecidos?

$$\angle PAQ + \angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ + \angle PEQ$$



Solución-1

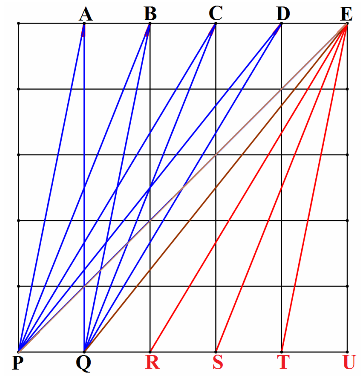
Marquemos nuevos puntos, **R**, **S**, **T** y **U**, en la cuadrícula.

Desplazando todos los ángulos, basta arrastrarlos desde sus correspondientes vértices, al punto E, quedan todos, uno a continuación de otro, sin superposición alguna y resulta, como vemos en el gráfico, muy fácil sumarlos:

$$\angle PAQ + \angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ + \angle PEQ =$$

$$\angle TEU + \angle SET + \angle RES + \angle QER + \angle PEQ =$$

$$\angle PEU = 45^\circ$$



Solución-2

Más ortodoxa, aunque menos elegante:

$$\angle PAQ + \angle PBQ + \angle PCQ + \angle PDQ + \angle PEQ =$$

$$\operatorname{ar\,tan}\frac{1}{5} + \left(\operatorname{ar\,tan}\frac{2}{5} - \operatorname{ar\,tan}\frac{1}{5}\right) + \left(\operatorname{ar\,tan}\frac{3}{5} - \operatorname{ar\,tan}\frac{2}{5}\right) +$$

$$\left(\operatorname{ar\,tan}\frac{4}{5} - \operatorname{ar\,tan}\frac{3}{5}\right) + \left(\operatorname{ar\,tan}\frac{5}{5} - \operatorname{ar\,tan}\frac{4}{5}\right) = \operatorname{ar\,tan} 1 = 45^\circ$$

Bien resuelto por: **Celso de Frutos de Nicolás** *(Jubilado. Coslada),* **Cristina Ceaus Caraga** *(IES Victoria Kent. Marbella),* **David Arso Civil** *(IES Miquel Tarradell. Barcelona),* **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba),* **Fernando Martín Gil** *(Ofic. Artillería. León),* **Francisco J. Babarro Rodríguez** *(Ourense),* **Henry Díaz Bordón** *(IES Vecindario. Las Palmas),* **Javier Ruiz de Larriva** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María),* **Joaquín Nadal Vidal** *(Llagostera),* **Julio J. Zárate Pinto** *(IES La Bureba. Briviesca),* **Marco Becerra Sulin** *(IES Mediterráneo. Málaga) y* **Miguel Pérez Fanjul**

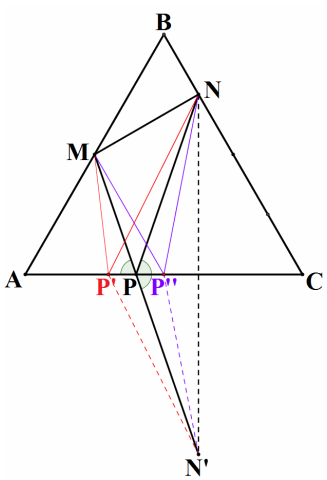
Se recibieron también dos soluciones incompletas y dos incorrectas.

Júnior

Jn-046. Perímetro mínimo.

Sobre un triángulo equilátero de vértices A, B y C consideramos los puntos M, el centro del lado AB, N sobre el lado BC de forma que $BN:NC \equiv 1:3$ y P sobre el lado AC de forma que el perímetro del triangulito MNP sea el menor posible. Sabiendo esto, ¿en qué proporción divide P al lado AC?

<u>*Solución*</u>



El perímetro del triangulito MNP es:

$s_{MNP} = MN + NP + PM$ donde la longitud del segmento MN es fija y la de NP y PM variables.

Por tanto, hemos de elegir el punto P de AC de forma que minimice la suma $NP + PM$ o, lo que es lo mismo, sin tener en cuenta la orientación de los segmentos, $MP + PN$

Consideramos N' el simétrico del punto N respecto al lado AC. Es fácil ver que el punto P, el que minimiza el perímetro del triangulito MNP, es la intersección de MN' y AC:

Cualquier otro punto sobre el lado AC, por la desigualdad triangular, da un perímetro mayor como vemos en la figura con P' o P''.

$$MP + PN = MP + PN' = MN' \le \begin{cases} MP' + P'M' & \rightarrow \quad s_{MNP} \le s_{MP'N'} \\ MP'' + P''N' & \rightarrow \quad s_{MNP} \le s_{MP''N'} \end{cases}$$

Y, además, como son iguales estos tres ángulos $\angle NPC = \angle CPN' = \angle MPA$, todos sombreados en la figura, los triángulos NPC y MPA son semejantes:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AM}{CN} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}$$

En conclusión: $\underline{AP = \frac{2}{5} AC}$

Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba),* **Fco Antonio de la Asunción Castelló** *(IES Playa San Juan),* **Henry Díaz Bordón** *(IES Vecindario. Las Palmas),* **J Carlos L** *(Politecmática),* **Joaquín Nadal Vidal** *(Llagostera) y* **José Antonio Rama López** *(Santiago de Compostela)*

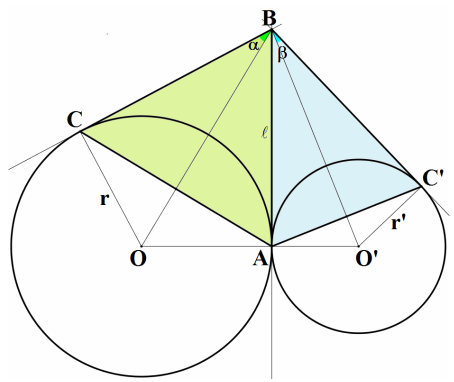
Se recibió también una solución incorrecta.

Sénior

S-046. Maña* y saber, para todo es menester.

Sean dos circunferencias, con centros en O y O' y radios r y r', respectivamente, tangentes exteriores en un punto A. Desde un punto B cualquiera de la recta tangente que tienen en común, se trazan las otras dos rectas tangentes a cada una de las dos circunferencias dadas, siendo los respectivos puntos de contacto C y C'. ¿Hacia dónde tiende el cociente de las áreas de los triángulos ABC y ABC' cuando el punto B, bien se acerca al punto A o bien se aleja indefinidamente del punto A?

<u>*Solución*</u>



Representemos la situación con detalle y, como vemos, los triángulos ABC y ABC' son isósceles, pues son iguales los segmentos tangentes $BA = BC = BC' = \ell$, y sus áreas son:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \sin 2\alpha \quad \text{y}$$

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \sin 2\beta$$

Y su cociente vale:

---

* *Este problema se propuso en 2018 en las Oposiciones de Matemáticas al Cuerpo de Profesores de Secundaria de la Comunidad Autónoma de Aragón. De ahí también lo de "maña".*

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\beta\cos\beta}=\frac{\tan\alpha\cos^2\alpha}{\tan\beta\cos^2\beta}=\frac{\tan\alpha\sec^2\beta}{\tan\beta\sec^2\alpha}=$$

$$=\frac{\tan\alpha(1+\tan^2\beta)}{\tan\beta(1+\tan^2\alpha)}=\frac{\frac{r}{\ell}\left(1+\frac{r'^2}{\ell^2}\right)}{\frac{r'}{\ell}\left(1+\frac{r^2}{\ell^2}\right)}=\frac{r(\ell^2+r'^2)}{r'(\ell^2+r^2)}$$

Y así, si el punto B se

acerca al punto A: $\underline{\lim_{\ell\to 0}\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}}}=\lim_{\ell\to 0}\frac{r(\ell^2+r'^2)}{r'(\ell^2+r^2)}=\frac{rr'^2}{r'r^2}=\underline{\frac{r'}{r}}$

aleja del indefinidamente de A: $\underline{\lim_{\ell\to\infty}\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}}}=\lim_{\ell\to\infty}\frac{r(\ell^2+r'^2)}{r'(\ell^2+r^2)}=\underline{\frac{r}{r'}}$

Bien resuelto por: Alejandro Camblor Fernández *(IES Rey Pelayo. Cangas de Onis),* Fco Antonio de la Asunción Castelló *(IES Playa San Juan),* Henry Díaz Bordón *(IES Vecindario. Las Palmas),* Javier Zambrana Aguilar *(Antequera),* Joaquín Nadal Vidal *(Llagostera),* José Antonio Rama López *(Santiago de Compostela),* Miguel Ángel Ingelmo Benito *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* Sebastià Roig Obrador *(Islas Baleares),* Sergio Sánchez Zufía *(Navarra) y* Tim Bao *(Kings College. Alicante)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y una incorrecta.

■