Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Julio/Agosto – 2024

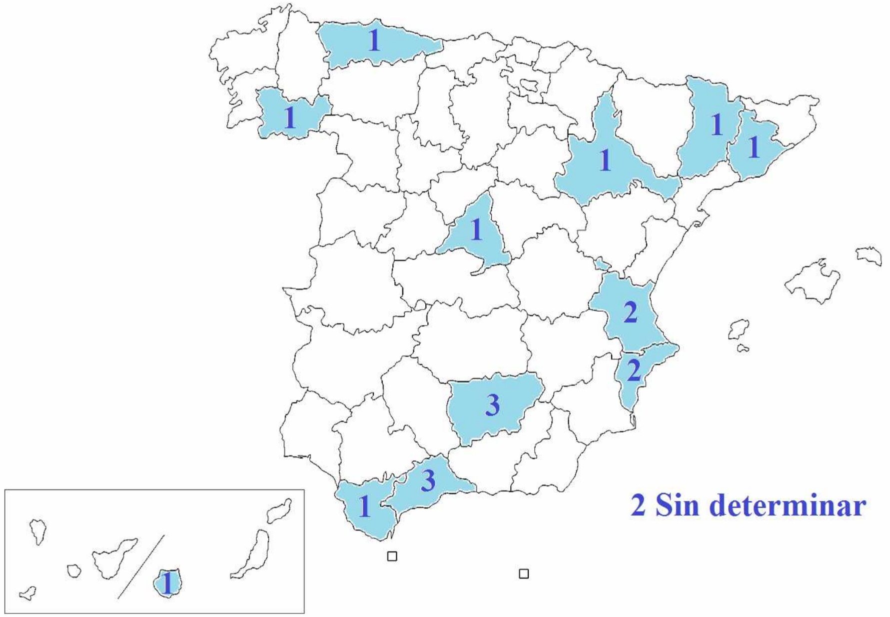
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
045	✓	✓	✓	✓	✓	✓
046	✓	✓	✓	✓	✓	✓
047	✓		✓		✓	

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

29 respuestas de 20 participantes (14 chicos / 6 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria) / Infantil (1º/2º ESO)

A-047 / I-047. Suma superada.

En una mesa hay inicialmente cinco cartas numeradas del 1 al 5. Ale y Bea se enfrentan en un juego en turnos alternados, comenzando Ale y con las siguientes reglas. Llamamos **X** al jugador que tiene el turno de juego, e **Y** a su rival. En su turno, **X** elige una carta de la mesa y la incorpora a su mano. Si la suma de las cartas en la mano de **X** es estrictamente mayor que la suma de las cartas en la mano de **Y**, termina el turno de **X** y juega **Y**, en caso contrario sigue jugando **X**. Pierde el jugador que por primera vez no pueda realizar una jugada valida para superar a su rival. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, y describir dicha estrategia.

Solución

Dado que $1+2+3+4+5=15$, el primer jugador que alcance una suma de cartas mayor o igual que 8 será el ganador, pues dejará a su rival sin jugadas válidas.

La respuesta es que Ale dispone de una estrategia ganadora, escogiendo al principio la carta 1 y continuando de esta manera:

- Si Bea roba el 5, Ale robará el 3. Como $1+3\le 5$, sigue jugando Ale, entonces roba el 4 y gana porque $1+3+4\ge 8$.
- Si Bea roba el 4, Ale robará el 3. Puesto que $1+3\le 4$, sigue jugando Ale, entonces roba el 5 y gana porque $1+3+5\ge 8$.
- Si Bea roba el 3, Ale robará el 2. Como $1+2\le 3$, sigue jugando Ale, roba el 5 y gana porque $1+2+5\ge 8$.
- - Si Bea roba el 2, Ale robará el 3. Quedan por robar las cartas 4 y 5. Sea cual sea la primera carta que robe Bea, la suma de sus cartas superará a la suma de Ale ya que $2+4>1+3$ y $2+5>1+3$, por lo tanto Bea sólo puede robar una carta, y al robar Ale la última carta obtiene la victoria, ya sea $1+3+5>2+4$ o bien $1+3+4>2+5$.

Como se ve, la estrategia para Ale es sencilla (una vez encontrada) y agota todas las réplicas posibles de Bea.

El análisis del juego puede alargarse un poco si se contemplan las jugadas iniciales de 2, 3, 4 o 5 para Ale, y se ve que en todos esos casos gana Bea. En efecto:

- Si Ale juega 5, gana Bea jugando 2, 3 y 4, en ese orden.
- Si Ale juega 4, gana Bea jugando 1, 3 y 5, en ese orden.
- Si Ale juega 3, Bea gana jugando ordenadamente 1, 2 y 5.
- Si Ale juega 2, Bea juega $1+3$. Quedan las cartas 4 y 5, haga lo que haga Ale sólo podrá robar una carta, quedará la última carta para Bea y ella ganará.

Por lo tanto, hemos demostrado que no solamente Ale se asegura la victoria empezando con la carta 1, sino que además hemos visto que cualquier otra jugada inicial de Ale permite la victoria de Bea, si juega de manera óptima.

Bien resuelto por: Henry Díaz Bordón *(IES José Zerpa. Vecindario),* Laura Reinaldos Santana, Víctor de Gracia García *(IES Uno. Requena),* Lucas Ferrandis del Agua *(C. San Pedro Pascual. Valencia),* David Sánchez Cuenca *(IES Serranía. Alozaina)*

Se recibió también una solución incompleta.

Cadete (3º/4º ESO) / Juvenil (1º/2º Bachillerato)

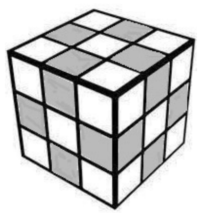
C-047 / Jv-047. Ratón comequeso.

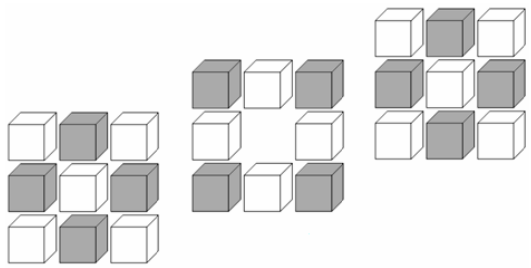
Le he montado a mi ratón un apetecible cubo de queso de dimensiones $3\times3\times3$ al que le he extraído el cubito central de tamaño $1\times1\times1$. El ratón se va comiendo los cubitos, uno tras otro, que en principio comparten alguna de sus caras. ¿En qué cubito debo situarlo de inicio para que pueda comerse todo el pedazo entero que le he preparado?

Solución

Da igual el cubito donde lo situemos al inicio, el ratón nunca podrá comerse entero el queso que le hemos preparado.

Para verlo supongamos ajedrezado el trozo y cortémoslo separándolo en tres capas verticales.



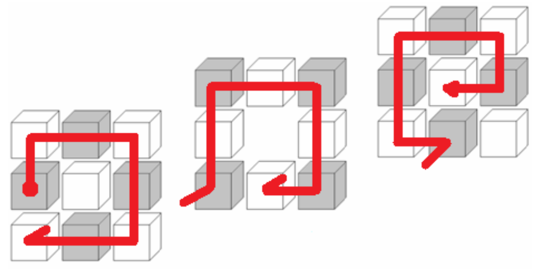


Como el cubito central se extrajo previamente, vemos que quedan $4+4+4=12$ cubitos oscuros y $5+4+5=14$ cubitos claros.

El ratón va comiendo los cubitos alternando su color y constatamos que si empieza en uno de color:

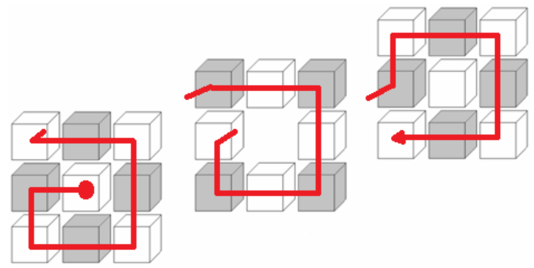
· Oscuro: $N_1B_1N_2B_2\ldots N_{12}B_{12}$, cuando acaba con todos los pares oscuros-claros, no puede continuar, pues le quedan dos claros.

He aquí un ejemplo:



· Claro: $B_1N_1B_2N_2\ldots B_{12}N_{12}$, cuando acaba con todos los pares claros-oscuros, puede continuar con un cubito claro más, $B_1N_1B_2N_2\ldots B_{12}N_{12}B_{13}$, pero no con el segundo.

He aquí también un ejemplo:



Bien resuelto por: Henry Díaz Bordón *(IES José Zerpa. Vecindario),* Iván López Márquez *(C. Inmaculada. Alicante),* Francisco J. Babarro Rodríguez *(Ourense),* Víctor de Gracia García *(IES Uno. Requena),* Javier Ruiz de Larriva *(Centro Inglés. Puerto de Santa María),* David Sánchez Cuenca *(E2-IES Serranía. Alozaina)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y dos incorrectas.

Jn-047 / S-047. Cuarenta y siete ranas.

En la competición, se dice que una rana **A** bate a otra rana **B** cuando en alguna carrera de saltos **A** queda al menos dos posiciones delante de **B**. Con cuarenta y siete ranas, ¿cuál es el mínimo número de carreras que se tendrían que celebrar, tal vez amañar, para que cada rana batiera, en al menos una carrera, a todas las demás?

Solución

En general, hagamos la primera carrera y numeremos las ranas según el resultado obtenido: 1, 2, 3, …, n. Así, en esta primera carrera, las **batidas** que se han producido son:

La rana	bate a:			
1		$3, 4, 5, 6, \ldots, n$	$\rightarrow$	$n-2$
2		$4, 5, 6, \ldots, n$	$\rightarrow$	$n-3$
3		$5, 6, \ldots, n$	$\rightarrow$	$n-4$
…	…	… … …	$\rightarrow$	…
$n-2$		n	$\rightarrow$	1
			Total:	$\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

Queremos que cada rana bata a todas las demás, esto es, que se produzcan $n(n-1)$ batidas, por tanto, podemos conseguir una acotación inferior del número de carreras, NC, que se requieren según el número de ranas:

$$NC \geq \left\lceil \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)/2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n}{n-2} \right\rceil = \left\lceil 2 + \frac{4}{n-2} \right\rceil \geq 3$$

siendo $\lceil x \rceil$ *la parte entera por exceso, esto es, el menor entero mayor o igual que* x

Obsérvese que la expresión indica que será más fácil construir, o amañar, las carreras cuanto mayor sea el número de ranas.

Para $n = 3 \rightarrow NC \geq \left\lceil 2 + \dfrac{4}{3-2} \right\rceil \geq 6$

Para $n = 4 \rightarrow NC \geq \left\lceil 2 + \dfrac{4}{4-2} \right\rceil \geq 4$

Para $n = 5 \rightarrow NC \geq \left\lceil 2 + \dfrac{4}{5-2} \right\rceil \geq 4$

Para $n = 6 \rightarrow NC \geq \left\lceil 2 + \dfrac{4}{6-2} \right\rceil \geq 3$

Para $n = 47 \rightarrow NC \geq \left\lceil 2 + \dfrac{4}{47-2} \right\rceil \geq 3$

Acotación que bien precisó la profesora Yolanda Márquez Moreno *(IES Playa San Juan. Alicante)*

En nuestro caso, $n = 47$, con cuatro carreras es claramente posible como indicó algún resolutor:

Primera carrera

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	

Segunda carrera

47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	.36	35	34	33	32
31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Tercera carrera

47	45	43	41	39	37	35	33	31	29	27	25	23	21	19	17
15	13	11	9	7	5	3	1	46	44	42	40	38	36	34	32
30	28	26	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	

Cuarta carrera

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
34	36	38	40	42	44	46	1	3	5	7	9	11	13	15	17
19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	

Pero veamos que con tres también es posible.

He aquí la solución que presentó el profesor Joan Folguera Farre (*Prf jubilado del Institut Samuel Gili y Gaya. Lleida)*

Primera carrera

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	

Segunda carrera

43	45	39	41	35	37	31	33	27	29	23	25	19	21	15	17
11	13	7	9	3	5	1	47	44	46	40	42	36	38	32	34
28	30	24	26	20	22	16	18	12	14	8	10	4	6	2	

Tercera carrera

46	42	38	34	30	26	22	18	14	10	6	47	2	44	40	36
32	28	24	20	16	12	8	4	45	41	37	33	29	25	21	17
13	9	5	43	39	35	31	27	23	19	15	11	7	3	1	

Bien resuelto por: Yolanda Márquez Moreno *(IES Playa San Juan),* Joan Folguera Farre *(I. Gili i Galla. Lleida)*

Se recibieron también ocho soluciones incorrectas.