Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Septiembre-2024

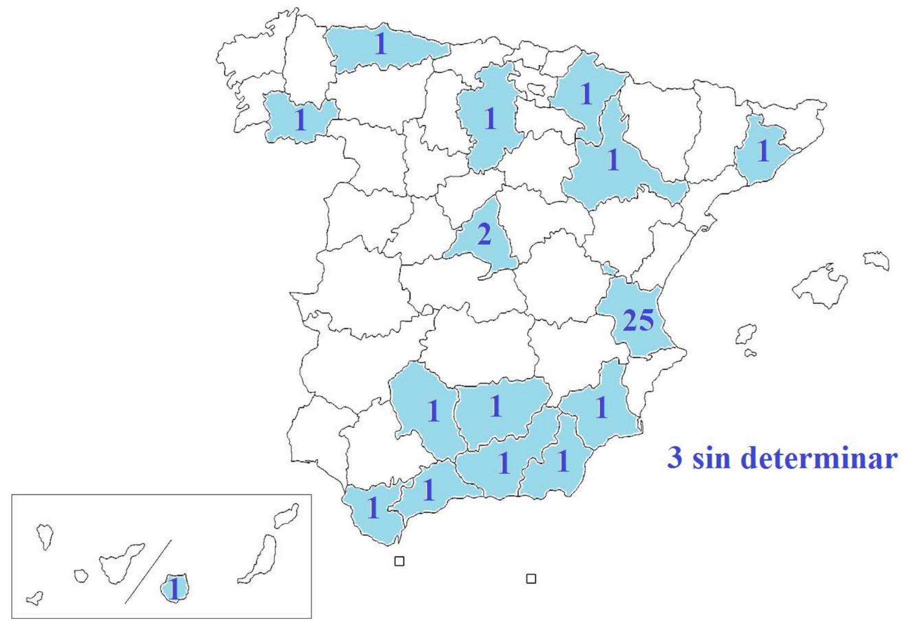
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
046	✓	✓	✓	✓	✓	✓
047	✓		✓		✓	
048	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

81 respuestas de 44 participantes (28 chicos / 13 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-048. Enigma matutino.

Al llegar esta mañana al aula había escritos unos números en la pizarra y lo curioso de ellos es que cada uno de ellos era igual a la mitad de la suma de todos los demás. ¿Puedes, con tan solo esta información, saber cuántos números se encontraron escritos esta mañana en la pizarra?

Solución

Si un número es igual a la mitad de la suma de todos los demás, entonces, es un tercio de la suma de todos.

Aunque no es preciso, si se quiere ver formalmente:

$$a = \frac{b+c+d+\ldots}{2} \;\rightarrow\; \frac{a}{2}+a = \frac{a}{2}+\frac{b+c+d+\ldots}{2} = \frac{a+b+c+d+\ldots}{2}$$

$$\rightarrow\; \frac{3a}{2} = \frac{\text{Suma}}{2} \;\rightarrow\; 3a = \text{Suma} \;\rightarrow\; a = \frac{\text{Suma}}{3}$$

Por tanto, son todos iguales y escritos en la pizarra había tres.

Bien resuelto por: F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Víctor Requena Trujillo *(Utiel)*, Celso de Frutos de Nicolás *(Prim Jubilado. Coslada)*, Alba Girotti Nieto *(IES Luis Vives. Valencia)*, Claudia Ortega Burguera *(IES Luis Vives. Valencia)*, Guillem Pérez García *(IES Luis Vives. Valencia)*, Zoe Martínez Sierra *(IES Luis Vives. Valencia)*, Silvia Anaya Rubio *(IES Luis Vives. Valencia)*, Sofía Cutanda González *(IES Luis Vives. Valencia) y* David Sánchez Cuenca *(E2-IES Serranía. Alozaina)*

Se recibieron también una solución incompleta y cuatro incorrectas.

Infantil (1º/2º ESO)

I-048. Equilibrio egipcio.

En un plato de una balanza clásica de dos brazos ponemos pesas de $1/8$, de $1/9$ y de $1/10$ de kilo. ¿Sería posible equilibrarla poniendo en el otro brazo dos pesas de fracción de kilo con la unidad por numerador? Si es posible, indica cómo y, si no, da una justificación convincente.

Solución

En realidad queremos ver si tiene solución en enteros positivos, esto es, en números naturales, la ecuación: $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Operemos con cuidado: $\frac{90+80+72}{8\cdot 9\cdot 10}=\frac{a+b}{a\cdot b} \rightarrow \frac{242}{8\cdot 9\cdot 10}=\frac{a+b}{a\cdot b}$

$$\frac{121}{360}=\frac{a+b}{a\cdot b} \rightarrow 121\cdot a\cdot b=360\cdot a+360\cdot b$$

Luego: $121\cdot a\cdot b-360\cdot a=360\cdot b \rightarrow 121\cdot a\cdot b-360\cdot a=360\cdot b$

$a\cdot(121\cdot b-360)=360\cdot b \rightarrow a=\frac{360\cdot b}{121\cdot b-360}$ que, como se puede ver fácilmente, es entero, por ejemplo, con $\underline{b=360}$

Así, si $b=360$, entonces, $a=\frac{360\cdot 360}{121\cdot 360-360}=\frac{360\cdot 360}{120\cdot 360}=3$

Por tanto, si es posible equilibrarla, como bien podemos comprobar:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{121}{360} \quad \text{y} \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{3}+\frac{1}{360}=\frac{120+1}{360}$$

Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** *(Córdoba)*, **Víctor Requena Trujillo** *(Utiel)*, **Claudia Ortega Burguera** *(IES Luis Vives. Valencia)*, **Guillem Pérez Garcia** *(IES Luis Vives. Valencia)*, **Martí García López** *(IES Luis Vives. Valencia)*, **Manuel Herrero Catalá** *(IES Luis Vives. Valencia) y* **David Sánchez Cuenca** *(IES Serranía. Alozaina)*

Se recibieron también quince soluciones incorrectas negando la posibilidad.

Cadete (3º/4º ESO)

C-048. Casi una décima.

Sin hacer uso de ningún programa, de ninguna aplicación, ni de ningún aparato de cálculo electrónico, prueba que:

$$\frac{2}{4\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 14}+\frac{2}{14\cdot 19}+\ldots+\frac{2}{2019\cdot 2024}<\frac{1}{10}$$

Solución

Operemos con sumo tacto:

$$\frac{2}{4\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 14}+\frac{2}{14\cdot 19}+\ldots+\frac{2}{2019\cdot 2024}=$$

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{5}{9\cdot 14}+\frac{5}{14\cdot 19}\ldots+\frac{5}{2019\cdot 2024}\right)=$$

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{9-4}{4\cdot 9}+\frac{14-9}{9\cdot 14}+\frac{19-14}{14\cdot 19}\ldots+\frac{2024-2019}{2019\cdot 2024}\right)=$$

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{19}\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2024}\right)=$$

$$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2024}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{5060}<\frac{1}{10} \quad \text{c.q.d.}$$

Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba)*, **Víctor Requena Trujillo** *(Utiel)*, **Pedro Luis Clavería Vila** *(Zaragoza)*, **Ana María Nave Fullana** *(IES Luis Vives. Valencia)*, **Julia Burguera del Socorro** *(IES Luis Vives. Valencia)*, **Ana Hernández Mateo** *(IES Luis Vives. Valencia)*, **Luis Sevilla Yunta** *(IES Luis Vives. Valencia)*, **David Sánchez Cuenca** *(IES Serranía. Alozaina)*, **Julio J. Zárate Pinto** *(IES La Bureba. Briviesca)* , **Javier Santiago, Raúl Muñoz Jiménez** *(IES Río Turia. Valencia) y* **Juan José Asensio García** *(IES Riu Turia. Quart de Poblet)*

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-048. Progresión semiaritmética.

A una progresión la llamamos semiaritmética si, dados el primer término a_1 y dos cantidades d_1 y d_2, para cada $n\geq 2$, se verifica que

$$a_n=a_{n-1}+d_1 \text{ si } n \text{ es par y } a_n=a_{n-1}+d_2 \text{ si } n \text{ es impar}$$

Obtén, en una sola fórmula, el término general de las progresiones semiaritméticas.

Solución:

Sea $\{b_n\}$ la progresión aritmética de primer término a_1 y diferencia $\frac{d_1+d_2}{2}$.

Veamos cuál es la sucesión $\{c_n\}=\{b_n\}-\{a_n\}$:

b_n	a_n	$c_n=b_n-a_n$
$b_1=a_1$	$a_1=a_1$	$c_1=0$
$b_2=a_1+\frac{1}{2}(d_1+d_2)$	$a_2=a_1+d_1$	$c_2=\frac{1}{2}(d_2-d_1)$
$b_3=a_1+(d_1+d_2)$	$a_3=a_1+d_1+d_2$	$c_3=0$
$b_4=a_1+\frac{3}{2}(d_1+d_2)$	$a_4=a_1+2d_1+d_2$	$c_4=\frac{1}{2}(d_2-d_1)$
$b_5=a_1+2(d_1+d_2)$	$a_5=a_1+2d_1+2d_2$	$c_5=0$
… … … … … … …	… … … … … … …	… … … … … …

Vemos que $\{c_n\}$ es una sucesión que alterna entre 0 para los impares y $\frac{d_2-d_1}{2}$ para los pares, por lo que su término general es:

$$c_n=\frac{(-1)^n+1}{2}\cdot\frac{d_2-d_1}{2}=((-1)^n+1)\cdot\frac{d_2-d_1}{4}$$

En conclusión, $a_n=b_n-c_n=a_1+\frac{d_1+d_2}{2}(n-1)-((-1)^n+1)\cdot\frac{d_2-d_1}{4}$

Y operando, $\underline{a_n=a_1+d_1\left(\frac{2n-1+(-1)^n}{4}\right)+d_2\left(\frac{2n-3-(-1)^n}{4}\right)}$

Bien resuelto por: Henry Díaz Bordón *(IES José Zerpa. Vecindario)*, Antonio Roberto Martínez Fernández *(CEA Mar Memor. Torre Pacheco)*, Javier Ruiz de Larriva *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Ana María Nave Fullana *(IES Luis Vives. Valencia)*, Luis Sevilla Yunta *(IES Luis Vives. Valencia)* y Javier Santiago

Se recibieron también seis soluciones incompletas y seis incorrectas.

J-048. Potencialmente siempre entero

Sea r un número tal que $r+\frac{1}{r}$ es entero. Demostrar que para todo entero $n\geq 1$ se tiene que $r^n+\frac{1}{r^n}$ también es un número entero.

Solución

Llamemos $e=r+\frac{1}{r}$ y $e_n=r^n+\frac{1}{r^n}$. Y queremos ver que, si e es entero, entonces para todo entero $n\geq 1$ también es entero e_n

Veamos algunos casos, en primer lugar para exponentes pares:

· Para $n=2$:

$$e^2=\left(r+\frac{1}{r}\right)^2=r^2+2+\frac{1}{r^2}=e_2+2\quad\rightarrow\quad e_2=e^2-2\in Z$$

· Para $n=4$

$$e^4=\left(r+\frac{1}{r}\right)^4=r^4+4r^2+6+\frac{4}{r^2}+\frac{1}{r^4}=$$
$$=r^4+\frac{1}{r^4}+4\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+6=e_4+4e_2+6\quad\rightarrow\quad e_4=e^4-4e_2-6\in Z$$

· Para $n=6$

$$e^6=\left(r+\frac{1}{r}\right)^6=r^6+6r^4+15r^2+20+\frac{15}{r^2}+\frac{6}{r^4}+\frac{1}{r^6}=$$
$$=r^6+\frac{1}{r^6}+6\left(r^4+\frac{1}{r^4}\right)+15\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+20=e_6+6e_4+15e_2+20\quad\rightarrow$$
$$\rightarrow\quad e_6=e^6-6e_4-15e_2-20\in Z$$

· Supongámoslo cierto hasta el par $n=2k$, esto es, $e_{2k}\in Z$ y veamos que, por las propiedades de los números combinatorios y reagrupando debidamente, también se cumple para $n=2k+2$, el par siguiente:

$$e^{2k+2}=\left(r+\frac{1}{r}\right)^{2k+2}=\binom{2k+2}{0}r^{2k+2}+\binom{2k+2}{1}r^{2k}+\binom{2k+2}{2}r^{2k-2}+....+\binom{2k+2}{k}r^{2}+$$

$$+\binom{2k+2}{k+1}+\binom{2k+2}{k+2}\frac{1}{r^{2}}+....+\binom{2k+2}{2k}\frac{1}{r^{2k-2}}+\binom{2k+2}{2k+1}\frac{1}{r^{2k}}+\binom{2k+2}{2k+2}\frac{1}{r^{2k+2}}$$

$$=r^{2k+2}+\frac{1}{r^{2k+2}}+\binom{2k+2}{1}\left(r^{2k}+\frac{1}{r^{2k}}\right)+\binom{2k+2}{2}\left(r^{2k-2}+\frac{1}{r^{2k-2}}\right)+...+\binom{2k+2}{k+1}$$

$$=e_{2k+2}+\binom{2k+2}{1}e_{2k}+\binom{2k+2}{2}e_{2k-2}+...+\binom{2k+2}{k}e_{2}+\binom{2k+2}{k+1}$$

y así: $e_{2k+2}=e^{2k+2}-\binom{2k+2}{1}e_{2k}-\binom{2k+2}{2}e_{2k-2}-...-\binom{2k+2}{k}e_{2}-\binom{2k+2}{k+1}\in Z$

Veamos, análogamente, para exponentes impares:

· Para $n=3$:

$$e^{3}=\left(r+\frac{1}{r}\right)^{3}=r^{3}+3r+\frac{3}{r}+\frac{1}{r^{3}}=r^{3}+\frac{1}{r^{3}}+3\left(r+\frac{1}{r}\right)=e_{3}+3e$$

$$\rightarrow\quad e_{3}=e^{3}-3e\in Z$$

· Para $n=5$:

$$e^{5}=\left(r+\frac{1}{r}\right)^{5}=r^{5}+5r^{3}+10r+\frac{10}{r}+\frac{5}{r^{3}}+\frac{1}{r^{5}}=$$

$$=r^{5}+\frac{1}{r^{5}}+5\left(r^{3}+\frac{1}{r^{3}}\right)+10\left(r+\frac{1}{r}\right)=e_{5}+5e_{3}+10e$$

$$\rightarrow\quad e_{5}=e^{5}-5e^{3}-10e\in Z$$

Para $n=7$

$$e^{7}=\left(r+\frac{1}{r}\right)^{7}=r^{7}+7r^{5}+21r^{3}+35r+\frac{35}{r}+\frac{21}{r^{3}}+\frac{7}{r^{5}}+\frac{1}{r^{7}}=$$

$$=r^{7}+\frac{1}{r^{7}}+7\left(r^{5}+\frac{1}{r^{5}}\right)+21\left(r^{3}+\frac{1}{r^{3}}\right)+35\left(r+\frac{1}{r}\right)=e_{7}+7e_{5}+31e_{3}+35e$$

$$\rightarrow\quad e_{7}=e^{7}-7e^{5}-21e^{3}-35e\in Z$$

· Supongámoslo cierto hasta el impar $n=2k-1$, esto es, $e_{2k-1}\in Z$ y veamos de nuevo que, por las propiedades de los números combinatorios y reagrupando debidamente, también se cumple para $n=2k+1$, el impar siguiente:

$$e^{2k+1}=\left(r+\frac{1}{r}\right)^{2k+1}=\binom{2k+1}{0}r^{2k+1}+\binom{2k+1}{1}r^{2k-1}+\binom{2k+1}{2}r^{2k-3}+....+\binom{2k+1}{k}r+$$

$$+\binom{2k+1}{k+1}\frac{1}{r}+....+\binom{2k+1}{2k-1}\frac{1}{r^{2k-3}}+\binom{2k+2}{2k}\frac{1}{r^{2k-1}}+\binom{2k+1}{2k+1}\frac{1}{r^{2k+1}}$$

$$=r^{2k+1}+\frac{1}{r^{2k+1}}+\binom{2k+1}{1}\left(r^{2k-1}+\frac{1}{r^{2k-1}}\right)+\binom{2k+1}{2}\left(r^{2k-3}+\frac{1}{r^{2k-3}}\right)+...+\binom{2k+1}{k}\left(r+\frac{1}{r}\right)$$

$$=e_{2k+1}+\binom{2k+1}{1}e_{2k-1}+\binom{2k+1}{2}e_{2k-3}+...+\binom{2k+1}{k}e$$

y así: $e_{2k+1}=e^{2k+1}-\binom{2k+1}{1}e_{2k-1}-\binom{2k+1}{2}e_{2k-3}-...-\binom{2k+1}{1}e\in Z$

Bien resuelto por: Henry Díaz Bordón *(B2-IES José Zerpa. Vecindario),* Antonio Roberto Martínez Fernández *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba) y* Víctor Requena Trujillo *(Utiel)*

Se recibió también una solución incompleta.

Sénior

S-048. Carrera de galgos.

Queremos detectar, entre m^2 galgos, los k más rápidos siendo $(k-1)(k+2)/2=m$ y, para ello, disponemos de una pista de carreras de m calles. Demostrar que con a lo sumo $m+2$ carreras se puede lograr.

Solución

· Para el caso general la manera de preceder va a ser totalmente análoga:

Primero: haremos m **carreras** con m perros repartidos en cada una.

Segundo: con los ganadores de cada una de éstas carreras, haremos la $(m+1)$-ava **carrera** y nombramos a los perros en función del resultado aquí obtenido:

P_{11}	P_{21}	P_{31}	…	…	P_{k1}	$P_{(k+1)1}$	…	…	P_{m1}

Llamamos: P_{i1} al perro que ocupó la posición i-esima en esta $(m+1)$-ava carrera y $P_{i2}, P_{i3}, \ldots, P_{im}$ a los que corrieron anteriormente con él, indicando el segundo subíndice la posición obtenida en esa primera carrera.

Esta tabla con todos los nombramientos da mucha información:

P_{11}	P_{21}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	P_{k1}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	P_{m1}
P_{12}	P_{22}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	P_{k2}				P_{m2}
P_{13}	P_{23}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	P_{k3}				
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$\dots$	$P_{2(k-1)}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_{1k}	P_{2k}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	P_{kk}				
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
P_{1m}	P_{2m}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	P_{km}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	P_{mm}

Así, con la $(m+1)$-ava carrera tenemos claro cuál es el perro más rápido: $\underline{P_{11}}$

Tercero: en la carrera $m+2$ colocamos los perros puestos en celda clara:

$P_{12}, P_{13}, \dots, \dots, P_{1k}$ / $P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2(k-1)}$ / $\dots, \dots, \dots$ / $P_{(k-1)1}, P_{(k-1)2}$ / P_{k1}

que son precisamente: $k-1+\frac{k\cdot(k-1)}{2}=(k-1)\cdot\left(1+\frac{k}{2}\right)=\frac{(k-1)(k+2)}{2}=m$ y, por tanto, llenamos la pista de m calles.

Y con los resultados de esta carrera tendremos a los $k-1$ galgos más rápidos, que nos faltaban por detectar.

Bien resuelto por: David González León *(Grado Mtcas.UGR)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(Córdoba)*, Alejandro Camblor Fernández *(IES RP. Cangas de Onis)*, Miguel Ángel Ingelmo Benito *(IES JS. Arganda del Rey)*, Sergio Sánchez Zufía *(Navarra)*, Víctor Requena Trujillo *(Utiel) y* Francisco Suárez García.

Se recibió también una solución incompleta.