Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Octubre – 2024

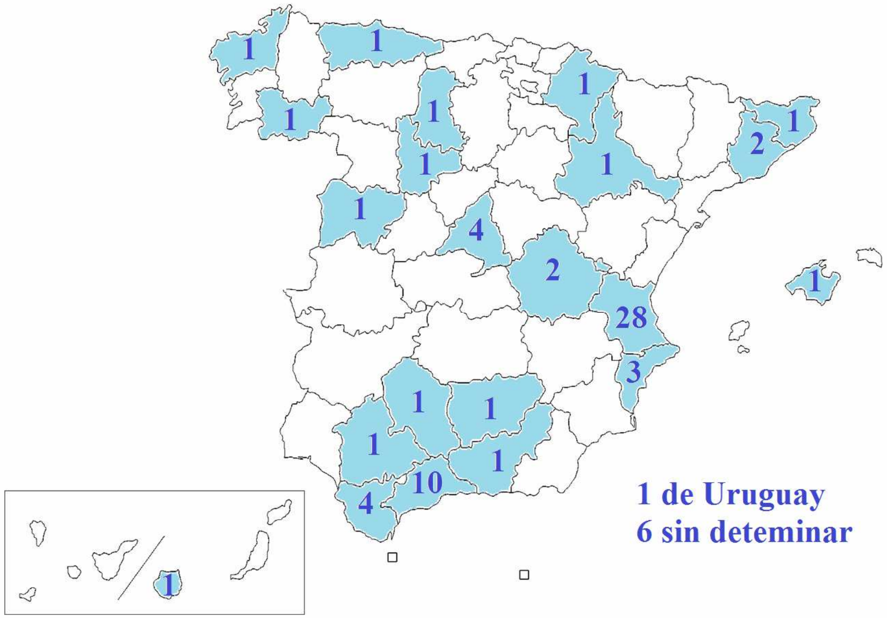
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
047	✓		✓		✓	
048	✓	✓	✓	✓	✓	✓
049	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

128 respuestas de 75 participantes (48 chicos / 27 chicas)



Alevín (5º/6º Primaria)

A-049. Chocolatinas al por mayor.

Por 9 chocolatinas pagué una cantidad entre 11 y 12 euros y por 13 pagué una cantidad entre 15 y 16 euros. Sabiendo que todas las chocolatinas cuestan lo mismo, ¿podrías decir cuánto valdrán exactamente 100 chocolatinas?

Solución

Siendo c el precio de una chocolatina, tenemos, por un lado que:

$$11 < 9c < 12 \quad \rightarrow \quad \frac{11}{9} < c < \frac{12}{9} \quad \rightarrow \quad 1'\hat{2} < c < 1'\hat{3}$$

Y, por otro, que:

$$15 < 13c < 16 \quad \rightarrow \quad \frac{15}{13} < c < \frac{16}{13} \quad \rightarrow \quad 1'153846... < c < 1'230769...$$

Luego, el precio de una chocolatina oscila entre $1'222222... < c < 1'230769...$

Y el de 100 chocolatinas, entre: $122'2222... < c < 123'0769...$

En consecuencia, en céntimos, 100 chocolatinas valdrán 123 céntimos

Bien resuelto por: Andros Albiol *(Massanet de la Selva. Gerona)*, David Arso Civil *(IES Miquel Tarradell. Barcelona)*, José Luis Velasco Álvarez *(SaCyL. Valladolid)*, Francisco J. Babarro Rodríguez *(Ourense)*, María Liñán Mateo, Víctor Requena Trujillo *(Utiel)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Sandra Rennit *(IES Las Dunas de las Chapas. Marbella)*, Laura García Robles *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada)*, Celso de Frutos de Nicolás *(Jubilado. Coslada)*, Alejandra Sumanu *(IES Eva Escribano. Minglanilla)*, Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca)* , Leyre Ali *(IES Luis Vives. Valencia)*, Sergi Díaz Lozano *(IES Luis Vives. Valencia)*, Alba Girotti Nieto *(IES Luis Vives. Valencia)*, Claudia Ortega Burguera *(IES Luis Vives. Valencia)*, Gael Ruiz Florido *(IES Luis Vives. Valencia)*, Guillem Pérez Garcia *(IES Luis Vives. Valencia)*, Xuxi Hu *(IES Luis Vives. Valencia)*, Manuel Herrero Catalá *(IES Luis Vives. Valencia)*, Silvia Anaya Rubio *(IES Luis Vives. Valencia)*, Sofía Cutanda González *(IES Luis Vives. Valencia) y* Aitor Espada García *(IESO Eva Escribano. Minglanilla)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y tres incorrectas.

Infantil (1º/2º ESO)

I-049. A vueltas con el 49.

Si x e y son enteros positivos y se verifica que $4x + 4xy + 9y = 49$, ¿qué valor toma $9x + 4y$?

Solución

Operando: $4x+4xy+9y=49 \quad \rightarrow \quad 4x+4xy+9y+9=49+9$

$(4x+9)(y+1)=58=29\cdot 2$ con valores enteros positivos sólo si $x=5$ e $y=1$. Por tanto: $\underline{9x+4y}=9\cdot 5+4\cdot 1=\underline{49}$

Bien resuelto por: David Arso Civil *(IES Miquel Tarradell. Barcelona),* Pablo González Cortes *(IES Sierra de Mijas. Málaga),* José Luis Velasco Álvarez *(SaCyL. Valladolid),* Mohammed Mahdi Samir Jewad, Francisco J. Babarro Rodríguez *(Ourense),* Víctor Requena Trujillo *(Utiel),* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba),* Santiago Jiménez *(Centro Inglés. Pto Sta María),* Sandra Rennit *(IES Las Dunas de las Chapas. Marbella),* Yago Marín Alvárez *(IES Santa Pola. Alicante),* Laura García Robles *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada),*Celso de Frutos de Nicolás *(Prim Jubilado. Coslada),* Daniel García Cañada *(IES La Melva. Elda),* Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca)*, Stuart Owen Andrews Arcila *(E1-Sierra de Mijas),* Arturo Sánchez López, Leyre Ali *(E2-IES Luis Vives. Valencia),* Sergi Díaz Lozano *(IES Luis Vives. Valencia),* Alba Girotti Nieto *(IES Luis Vives. Valencia),* Claudia Ortega Burguera *(IES Luis Vives. Valencia),* Dolça García Espí *(IES Luis Vives. Valencia)*, Gael Ruiz Florido *(IES Luis Vives. Valencia),* Guillem Pérez Garcia *(IES Luis Vives. Valencia),* Xuxi Hu *(IES Luis Vives. Valencia),* Martí García Lòpez *(IES Luis Vives. Valencia),* Silvia Anaya Rubio *(IES Luis Vives. Valencia),* Kyrakos Leandros, Dragonas *(IES Luis Vives. Valencia) y* Aitor Espada García *(IESO Eva Escribano. Minglanilla)*

Se recibieron también tres soluciones incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

C-049. Cuestión de partes enteras.

Demuestra debidamente que para cualquier entero positivo n que elijas se cumple:

$$\left\lfloor\sqrt{1\cdot 2}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt{2\cdot 3}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\sqrt{n(n+1)}\right\rfloor=\frac{n(n+1)}{2}$$

Solución

Es claro que para enteros positivos se tiene que $n^2<n(n+1)<(n+1)^2$ y, tomando raíces cuadradas, que $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$

Luego, para todo entero positivo, $\left\lfloor\sqrt{n(n+1)}\right\rfloor=n$

Por tanto: $\left\lfloor\sqrt{1\cdot 2}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt{2\cdot 3}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\sqrt{n(n+1)}\right\rfloor=1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ c.q.d.

Bien resuelto por: David Arso Civil *(IES Miquel Tarradell. Barcelona),* José Luis Velasco Álvarez *(SaCyL. Valladolid),* Babil Delgado García *(IES Sierra de Mijas. Málaga),* Iván López Márquez *(C. Inmaculada. Alicante),* Víctor Requena Trujillo *(Utiel),* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba),* Henry Díaz Bordón *(IES José Zerpa. Vecindario),* Juan Manuel Sánchez Hernández *(IESO Las Batuecas. La Alberca),* Laura Parejo Pino *(IES Sierra Mijas. Las Lagunas de Mijas),* Celso de Frutos de Nicolás *(Prim Jubilado. Coslada),* Claudia Viana Pérez, Rocío Mangas Toro *(E3-Centro Inglés. Pto Sta María),* Sergio Peláez Rojas *(IES Sierra de Mijas),* Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca)*, Ainhoa Boeta Serrano *(IES SM. Las Lagunas de Mijas)*, Fernando Spinola Bejarano *(C Virgen de Gracia Granada),* Lorena Badesa Pérez *(C. Santa Ana. Calatayud),* Candela Andreu Palomas *(IES Sierra de Mijas),* Aarón Garrido García, Juan José Asensio García *(IES Riu Turia. Quart de Poblet),* Joan Viña Pérez *(IES Luis Vives. Valencia),* Ana María Nave Fullana *(IES Luis Vives. Valencia),* Diego Sancho Martínez *(IES Luis Vives. Valencia),* Luis Sevilla Yunta *(IES Luis Vives. Valencia),* Julia Burguera del Socorro *(IES Luis Vives. Valencia),* Ana Hernández Mateo *(IES Luis Vives. Valencia),* Víctor Rodríguez Dávila *(IES Luis Vives. Valencia) y* Alba Peñín Quintana *(IES Luis Vives. Valencia)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-049. En busca del primo perdido.

Busca todas las cuaternas de números enteros positivos (p,q,r,s) que cumplen, a la vez, que $pq=rs$ y $p+q+r+s$ es primo

Solución

Si $pq=rs$, como son todos enteros positivos, podemos despejar: $s=\dfrac{pq}{r}$

Así, como la suma de los cuatro enteros positivos de la cuaterna será entero positivo,

$$p+q+r+s=p+q+r+\frac{pq}{r}=\frac{pr+qr+r^2+pq}{r}=\frac{p(r+q)+r(r+q)}{r}=\frac{(p+r)(q+r)}{r},$$

esta expresión será simplificable, y como $p+r>r$ y $q+r>r$, producto de dos factores distintos de la unidad, esto es, será siempre un número compuesto.

En conclusión, <u>no hay cuaterna alguna</u> de enteros positivos que cumplan las dos condiciones que dice el enunciado.

Bien resuelto por: David Arso Civil *(IES Miquel Tarradell. Barcelona),* José Luis Velasco Álvarez *(SaCyL. Valladolid),* Víctor Requena Trujillo *(Utiel),* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba),* F. Damián Aranda Ballesteros *(Prof. IPEP-Córdoba),* Eva Barrera Vázquez *(Centro Inglés. Pto Sta Mª),* Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca),* Iván Aldehuela Jaime *(Col. Nuestra Señora de las Nieves. Madrid),* Alejandro Pallarés Valiente *(Col. Nuestra Señora de las Nieves. Madrid) y* José Mangas Toro *(E4-Centro Inglés. Pto Sta María)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y cuatro incorrectas.

Júnior

Jn-049. Reales mayores o iguales que uno.

Prueba que para todo $x, y \in [1, \infty[$ se cumple que:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$$

Solución

· Si $\underline{x = y}$ la expresión es cierta, se da la igualdad: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{2}{1+x^2}$

· Veamos el caso en que $\underline{x \neq y}$

Hemos de comparar estas dos expresiones: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} :: \frac{2}{1+xy}$

O lo que es lo mismo, una vez hemos operado: $\frac{2+x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} :: \frac{2}{1+xy}$

y que, por ser ambas fracciones positivas, también es equivalente a comparar:

$(2+x^2+y^2)(1+xy) :: 2(1+x^2)(1+y^2)$, expandiendo:

$2+2xy+x^2+x^3y+y^2+xy^3 :: 2+2x^2+2y^2+2x^2y^2$, simplificando:

$2xy+x^3y+xy^3 :: x^2+y^2+2x^2y^2$, reagrupando:

$x^3y+xy^3-2x^2y^2 :: x^2+y^2-2xy$, factorizando:

$xy(x^2+y^2-2xy) :: (x-y)^2$ y, de nuevo:

$xy(x-y)^2 :: (x-y)^2$ y, como $x \neq y$, podemos simplificar:

$xy :: 1$ y, como $\underline{xy \geq 1}$, todo el proceso seguido es reversible y se cumple la desigualdad

Bien resuelto por: David Arso Civil *(IES Miquel Tarradell. Barcelona)*, José Antonio Rama López *(Santiago de Compostela)*, José Luis Velasco Álvarez *(SaCyL. Valladolid)*, Víctor Requena Trujillo *(Utiel)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Henry Díaz Bordón *(IES José Zerpa. Vecindario) y* Juan Manuel Sánchez Hernández *(IESO Las Batuecas. La Alberca)*

Sénior

S-049. Recursividad entera.

La sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\geq 0}$ está definida recursivamente de la siguiente manera: $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2+4}$.

Demuestra que todos los términos de la sucesión son enteros.

Solución

Hallemos algunos términos por si podemos intuir el comportamiento de la sucesión:

$x_0 = 0$, $\quad x_1 = 2\cdot 0 + \sqrt{3\cdot 0^2+4} = 2$

$x_2 = 2\cdot 2 + \sqrt{3\cdot 2^2+4} = 8 \quad x_3 = 2\cdot 8 + \sqrt{3\cdot 8^2+4} = 30$

$x_4 = 2\cdot 30 + \sqrt{3\cdot 30^2+4} = 112 \quad x_5 = 2\cdot 112 + \sqrt{3\cdot 112^2+4} = 418$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Si $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2+4}$, entonces $x_{n+1} - 2x_n = \sqrt{3x_n^2+4}$. Así, elevando al cuadrado: $x_{n+1}^2 - 4x_n x_{n+1} + 4x_n^2 = 3x_n^2 + 4 \;\rightarrow\; x_{n+1}^2 - 4x_n x_{n+1} + x_n^2 = 4 \;\rightarrow$

Sumando $3x_{n+1}^2$ en cada miembro de la igualdad:

$$4x_{n+1}^2 - 4x_n x_{n+1} + x_n^2 = 3x_{n+1}^2 + 4 \;\rightarrow\; (2x_{n+1} - x_n)^2 = 3x_{n+1}^2 + 4 \;\rightarrow$$

$$2x_{n+1} - x_n = \sqrt{3x_{n+1}^2+4}$$

De nuevo, sumando $2x_{n+1}$ en cada miembro de esta igualdad:

$$\underline{4x_{n+1} - x_n} = 2x_{n+1} + \sqrt{3x_{n+1}^2+4} = \underline{x_{n+2}}$$

En general, corriendo los subíndices, hemos visto que $\underline{x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}}$ y, como $x_0 = 0$ y $x_1 = 2$, por inducción, todos los términos de la sucesión resultarán enteros, todos son resultado de una combinación lineal entera de los dos anteriores.

Bien resuelto por: Miguel Ángel Ingelmo Benito *(IES JS. Arganda del Rey)*, Fco Javier González Piñeiro *(Tacuarembó. Uruguay)*, David Arso Civil *(IES Miquel Tarradell. Barcelona)*, Francisco Suárez García *(Sevilla)*, José Luis Velasco Álvarez *(SaCyL. Valladolid)*, Víctor Requena Trujillo *(Utiel)*, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Henry Díaz Bordón *(IES José Zerpa. Vecindario)*, Juan Manuel Sánchez Hernández *(IESO Las Batuecas. La Alberca)*, José Segura Montés, Alejandro Camblor Fernández *(IES RP. Cangas de Onis)*, Sebastià Roig Obrador *(Islas Baleares) y* Sergio Sánchez Zufía *(Navarra)*

Se recibieron también una solucion incompleta.