# PROBLEMA DEL MES

Real Sociedad Matemática Española

*Noviembre – 2024*

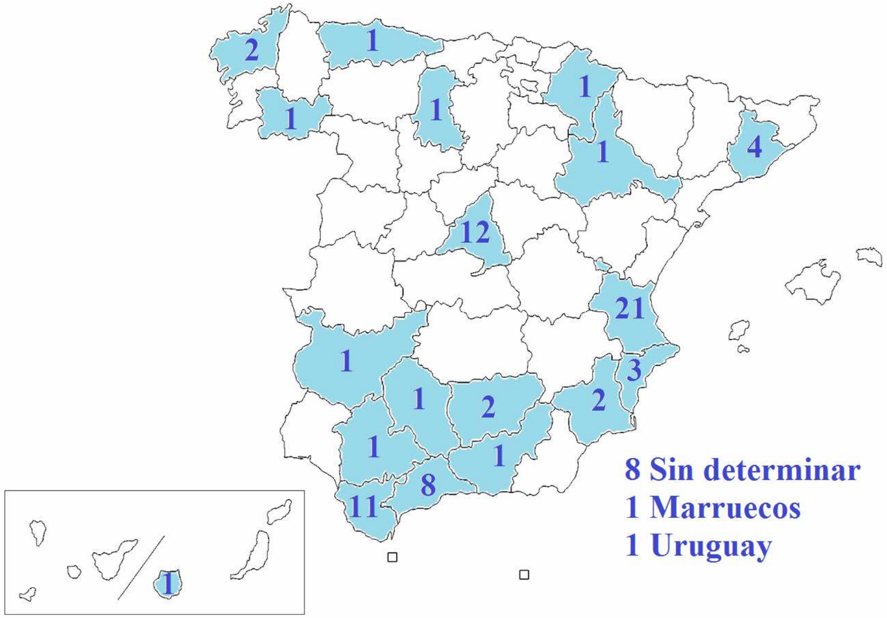
*Soluciones*

## Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

| | Alevín | Infantil | Cadete | Juvenil | Júnior | Sénior |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 048 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 049 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| 050 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

*Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.*

**127 respuestas de 85 participantes (58 chicos / 27 chicas)**




### Alevín (5º/6º Primaria)

**A-050. Tetraedro coloreado.**

Cada cara de un tetraedro regular se pinta de un color diferente. ¿Cuántos tetraedros distintos (indistinguibles) se pueden encontrar?

*Solución*

Fijamos el tetraedro sobre una cara. Rotándola sobre la misma podemos ver el mismo tetraedro de tres formas distintas. Al repetir esto con cada una de las tres caras restantes el mismo tetraedro se puede mirar de $4\times3=12$ formas distintas.

Las posibles coloraciones serían $4\times3\times2\times1=24$. Y el número de tetraedros indistinguibles es $24/12=2$ formas únicamente, que se puede interpretar como un tetraedro en cualquier posición y su imagen mediante un espejo o como el tetraedro simétrico respecto de un plano. Desde el punto de vista de la orientación cada uno de estos dos tetraedros corresponde a una orientación positiva y otra negativa.

*Bien resuelto por:* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Víctor Requena Trujillo *(Utiel)*, Ferran Vila Valero *(IES Luis Vives. Valencia)*, Dolça García Espí *(IES Luis Vives. Valencia)*, Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca)* y David Sánchez Cuenca *(E2-IES Serranía. Alozaina)*

*Se recibieron también once soluciones incorrectas.*

### Infantil (1º/2º ESO)

**I-050. Nunca tres por un mismo punto.**

En el plano hay un conjunto de rectas tales que dos cualesquiera se cortan pero tres cualesquiera no pasan por un mismo punto. El número total de puntos intersección es 153. ¿Cuántas rectas tiene este conjunto?

*Solución*

Un conjunto de rectas que cumplan las condiciones el problema tienen $n(n-1)/2$ puntos de intersección porque cada recta corta a las otras $n-1$ y el producto de $n(n-1)$ cuenta los puntos de intersección dos veces. Es necesario dividir este producto por 2.

Por otra parte $153\times2=306=2\times3\times3\times17=18\times17$; es decir $153=(18\times17)/2$ y así el número de rectas es 18.

*Bien resuelto por:* Valeria Gil Puebla, F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Jaume López Ramírez *(IES Rascanya. Valencia)*, Francisco J. Babarro Rodríguez *(Ourense)*, David Ferrer Parrado, Pablo González Cortes *(IES Sierra de Mijas. Málaga)*, Santiago Jiménez *(Centro Inglés. Puerto de Santa María)*, Celso de Frutos de Nicolás *(Coslada)*, Víctor Requena Trujillo *(Utiel)*,

**Cayetano Buzón Moscoso** *(C Inglés. Pto Sta María),* **Martí García Lòpez** *(IES Luis Vives. Valencia),* **Julio J. Zárate Pinto** *(IES La Bureba. Briviesca),* **Rania Barrada** *(CE Luis Vives. Larache),* **Laura García Robles** *(IES Villa de Stgo. Stgo Espada),* **Arturo Sánchez López** *(IES Las Durnas de las Chapas. Marbella),* **Jan Andrés Chacón** *(C St Lluis. Barcelona),* **Milena Arsenyan Kobalyan** *(C St Lluis. Barcelona),* **Rubén Martínez Mendoza** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada) y* **Stuart Owen Andrews Arcila** *(IES Sierra de Mijas. Málaga )*

*Se recibieron también una solución incompleta y siete incorrectas.*

## Cadete (3º/4º ESO)

### C-050. Sempiterno pitagórico.

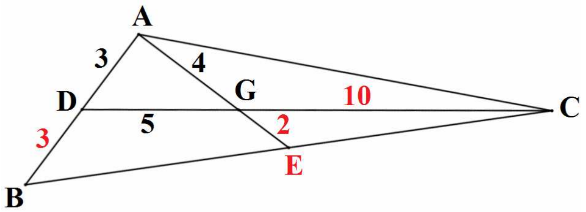
En un triángulo $ABC$, $D$ es el punto medio del lado $AB$ y $G$ su baricentro.

Halla las longitudes de sus lados sabiendo que $AD = 3$, $AG = 4$ y $DG = 5$.

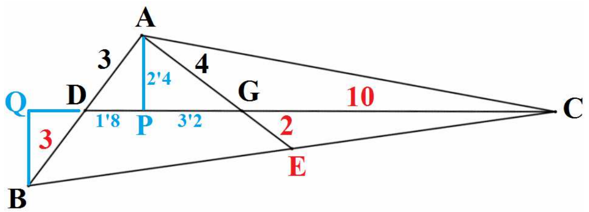
*Solución*

Efectivamente, $ADG$ es un triángulo pitagórico, el archiconocido $3:4:5$. Y sabiendo que el baricentro divide siempre a las tres medianas en dos segmentos en proporción $2:1$ la cuestión resulta fácilmente asequible.

Así, pues la situación representada es:




Trazando desde los vértices $A$ y $B$ líneas perpendiculares a la dirección del la mediana $CD$, tenemos los puntos de corte $P$ y $Q$ y triángulos semejantes al $ADG$:




Triángulo: $APG$ $\quad \underline{AP:GP:AG} \Rightarrow 3\cdot 0'8 : 4\cdot 0'8 : 5\cdot 0'8 \equiv \underline{2'4 : 3'2 = 4}$

Triángulo: $ADP$ $\quad \underline{DP:AP:AD} \Rightarrow 3\cdot 0'6 : 4\cdot 0'6 : 5\cdot 0'6 \equiv \underline{1'8 : 2'4 : 3}$

Y, finalmente, congruente con éste por tener igual hipotenusa y los mismos ángulos, el triángulo: $BDQ$ $\quad \underline{DQ:BQ:DB} \Rightarrow \underline{1'8:2'4:3}$

Con eso ya podemos determinar la longitud de los tres lados del triángulo $ABC$:

$$AB = AD + DB = 3 + 3 = 6 \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \underline{c = 6}$$

$$AC = \sqrt{AP^2 + PC^2} = \sqrt{2'4^2 + 13'2^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \quad \rightarrow \quad \underline{b = 6\sqrt{5}}$$

$$BC = \sqrt{BQ^2 + QC^2} = \sqrt{2'4^2 + 16'8^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2} \rightarrow \quad \underline{a = 12\sqrt{2}}$$

o bien, viendo que es el doble de la diagonal de $ABE$ que es una escuadra: $2\cdot 6\sqrt{2}$

*Bien resuelto por:* **F. Damián Aranda Ballesteros** *(IPEP-Córdoba),* **Francisco J. Babarro Rodríguez** *(Ourense),* **Álvaro Vázquez Ramírez, Alfredo Abraldes Pérez** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María),* **Ana María Nave Fullana** *(IES Luis Vives. Valencia),* **Celso de Frutos de Nicolás** *(Coslada),* **Julia Burguera del Socorro** *(IES Luis Vives. Valencia),* **Diego Sancho Martínez** *(IES Luis Vives. Valencia),* **Alba Peñín Quintana** *(IES Luis Vives. Valencia),* **Ana Hernández Mateo** *(IES Luis Vives. Valencia),* **Pau Acero Moreno** *(IES Joanot Martorell. Valencia),* **Víctor Requena Trujillo** *(Utiel),* **Iván López Márquez** *(C. Inmaculada. Alicante),* **Julio J. Zárate Pinto** *(IES La Bureba. Briviesca),* **Fátima Zahra El Rhazali** *(IES Felipe II. Mazarrón),* **Vahe Arsenyan Kobalyan** *(C St Lluis. Barcelona),* **Fernando Spinola Bejarano** *(C Virgen de Gracia Granada),* **Yile Liu** *(C St Lluis. Barcelona),* **David Sánchez Cuenca** *(IES Serranía. Alozaina),* **Carlos Navarro Manso** *(IES La Melva. Elda) y* **Antonio Roberto Martínez Fernández** *(CEA MM. Torre Pacheco. )*

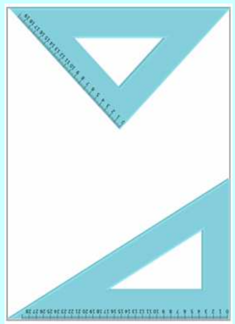
*Se recibieron también siete soluciones incorrectas.*

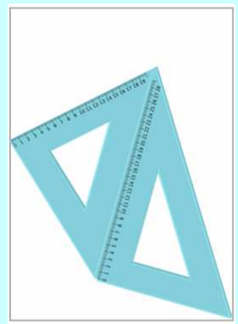
## Juvenil (1º/2º Bachillerato)

### Jv-050. Jugando con la escuadra y el cartabón.

Tenemos una escuadra y un cartabón de modo que, como muestra la figura de la izquierda, la hipotenusa de la escuadra y el cateto mayor del cartabón miden lo mismo que la anchura de una hoja de papel.

Si colocamos la escuadra y el cartabón unidos por el lado común como en la figura de la derecha, ¿cuánto mide el ángulo que forma la parte inferior del cartabón con la base del folio?





*Solución*

Considerando 1 u.d.l. la anchura del folio, las dimensiones de la escuadra y el cartabón son, respectivamente:

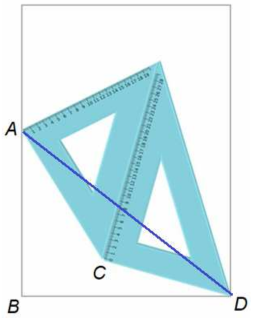
$$\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} : 1 : \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Por el teorema del coseno sobre el triángulo ACD:

$$AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2\cdot AC\cdot CD\cdot\cos 135^\circ}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{6}}$$




Llamando $\beta=\angle ADC$, por el teorema del seno: $\dfrac{AD}{\sin 135^\circ}=\dfrac{AC}{\sin\beta}\ \rightarrow$

$$\sin\beta=\frac{AC\cdot\sin 135^\circ}{AD}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{6}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5+2\sqrt{3}}}\ \rightarrow\ \beta\cong 24^\circ\ 53'\ 46''$$

Llamando $\gamma=\angle ADB\ \rightarrow\ \cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{6}}}=\sqrt{\dfrac{6}{5+2\sqrt{3}}}\ \rightarrow\ \gamma\cong 32^\circ\ 39'\ 13''$

Y, por último, el ángulo pedido es: $\underline{\alpha=\angle BDC}=\gamma-\beta\cong\underline{7^\circ\ 45'\ 27''}$

*Bien resuelto por:* Carolina Almagro Fernández *(C Inglés. Puerto de Santa María),* F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba),* Sixto López *(IES Castuera. Badajoz),* Francisco J. Babarro Rodríguez *(Ourense),* Ignacio Larrosa Cañestro *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* Henry Díaz Bordón *(IES José Zerpa. Vecindario),* Ana María Nave Fullana *(IES Luis Vives. Valencia),* Celso de Frutos de Nicolás *(Coslada),* Luis Sevilla Yunta *(IES Luis Vives. Valencia),* Pau Acero Moreno *(IES Joanot Martorell. Valencia),* Víctor Requena Trujillo *(Utiel),* Margarita Ragel Castilla *(El Centro Inglés. Puerto de Santa María),* Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca),* Alejandro Pallarés Valiente *(Col. N Sra de las Nieves. Madrid),* Víctor Merino Pascual *(Col. N Sa de las Nieves. Madrid),* Iván Aldehuela Jaime *(Col. N Sra de las Nieves. Madrid),* Juan José Asensio García *(IES Riu Turia. Quart de Poblet) y* Manel Vergel Cifre *(IES Santa Pola. Santa Pola)*

*Se recibieron también una solución incompleta y diecinueve incorrectas.*

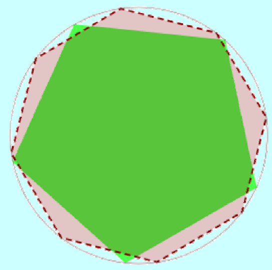


## Jn-050. Polígonos rotatorios.

En una circunferencia se inscriben un pentágono regular y un octógono regular. En la posición inicial, estos dos polígonos comparten un radio.

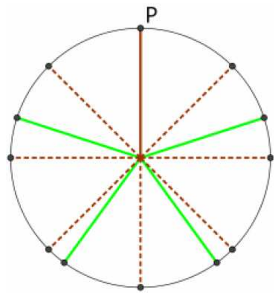
Se efectúa un giro de ángulo $\alpha$ y se miden todos los ángulos que determinan los radios del pentágono con los del octógono. Sea $\beta$ el mínimo de estos ángulos.

Demostrar que $\beta$ no puede ser superior a $4{,}5^\circ$.



***Solución***

Consideremos la posición inicial, donde pentágono y octógono tienen un punto en común, el punto $P$, según indica la figura. Así, la circunferencia queda dividida en 5 ángulos iguales o bien en 8 ángulos iguales, según el caso del pentágono o del octógono.

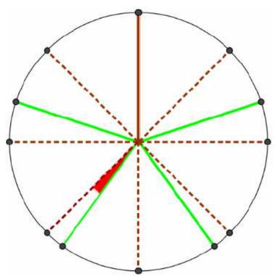



Estos ángulos se pueden expresar respectivamente de esta manera: $\dfrac{2\pi}{5}\cdot a$ ó $\dfrac{2\pi}{8}\cdot b$

con $a=0,1\ldots,4$ y $b=0,1\ldots,7$ números enteros.

Para encontrar el ángulo $\beta$, estudiamos la diferencia entre estas dos expresiones, es decir:

$$\frac{2\pi}{5}\cdot a-\frac{2\pi}{8}\cdot b=\frac{4a-5b}{40}\cdot 2\pi$$



El valor mínimo que toma esta expresión es la siguiente (como también se puede ver en la figura):

$$\frac{2\pi}{5}\cdot 2-\frac{2\pi}{8}\cdot 3=\frac{1}{40}\cdot 2\pi=\frac{2\pi}{40}$$

Finalmente, al hacer una rotación de ángulo $\alpha$:

· el ángulo anterior pasará a ser $\dfrac{2\pi}{40}-\alpha$

· y los dos radios que unían el centro con el punto $P$ estarán separados por un ángulo $\alpha$

Por tanto, el ángulo $\beta$ que buscamos es el valor que **maximiza** la siguiente función

$$y(\alpha)=\text{mín}\left(\alpha,\ \frac{2\pi}{40}-\alpha\right)$$

Esta función toma su valor máximo siguiente: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{40}=\frac{\pi}{40}$

Con lo cual demostramos que $\beta$ no puede ser superior a 4,5º c.q.d.

***Observación del proponente:***

*Se puede modificar el enunciado y hacer intervenir otros polígonos regulares, de $n$ y $m$ lados respectivamente.*

*Bien resuelto por:* F. Damián Aranda Ballesteros *(Prof. IPEP-Córdoba),* Henry Díaz Bordón *(IES José Zerpa. Vecindario),* Celso de Frutos de Nicolás *(Coslada),* Pau Acero Moreno *(IES Joanot Martorell. Valencia),* Víctor Requena Trujillo *(Utiel)*

*Se recibió también una solución incorrecta.*

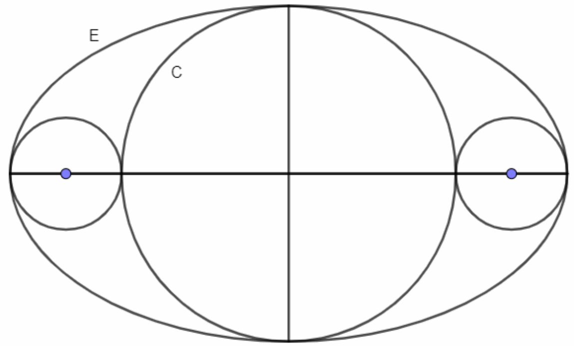
**Sénior**

## S-050. Una excentricidad.

Sea $E$ una elipse y $C$ la mayor circunferencia tangente interior a $E$. Determinar la excentricidad de la elipse $E$ sabiendo que las circunferencias con centro en los focos y tangentes exteriores a $C$, son tangentes interiores a $E$.

*Solución:*

La situación es la siguiente:




Si, como es la notación habitual, $a$ es el semieje mayor, $b$ el semieje menor y $c$ la semidistancia focal, se ve que la distancia del foco derecho (ó izquierdo) al vértice derecho (ó izquierdo) es igual que la distancia del foco a la circunferencia $C$, cuyo radio es el semieje menor $b$. Es decir, $a-c=b-c$. Por tanto $b=a-2c$.

Por otro lado, sabemos que $a^2=b^2+c^2$ y, así, sustituyendo, se tiene que:

$$a^2=(a-2c)^2+c^2 \;\rightarrow\; a^2=a^2-4ac+4c^2+c^2 \;\rightarrow\; 4ac=5c^2$$

Y como $c$ como no puede ser nula, concluimos que $4a=5c$, por lo que la excentricidad es $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$, esto es, $\underline{e=0'8}$

Conviene comprobar si la circunferencia de centro el foco es tangente a la elipse.

Por semejanza, podemos suponer que $a=5$, por lo que $c=4$ y $b=3$, resultando así que la elipse es $E:\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ y la circunferencia de centro el foco derecho $F(4,0)$ y radio $r=a-c=1$, es $C':(x-4)^2+y^2=1$

Despejando, $y^2=1-(x-4)^2$, y sustituyendo en $E$: $E:\frac{x^2}{25}+\frac{1-(x-4)^2}{9}=1 \;\rightarrow$

$$9x^2+25-25(x^2-8x+16)=225 \;\rightarrow\; 9x^2+25-25x^2+200x-400=225$$

$$\rightarrow\; 0=16x^2-200x+600 \;\rightarrow\; x=\begin{cases} 5 & \rightarrow \quad y=0 \\ 15/2 & \rightarrow \quad y=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}i \end{cases}$$

Por lo que solo hay un punto de corte, que es el punto de tangencia.

*Bien resuelto por:* Alejandro Camblor Fernández *(IES Rey Pelayo. Cangas de Onís),* Ignacio Larrosa Cañestro *(IES Rafael Dieste. A Coruña),* José Antonio Rama López *(Santiago de Compostela),* Manuel Paz Delgado, Celso de Frutos de Nicolás *(Coslada),* Víctor Requena Trujillo *(Utiel),* Francisco Suárez García *(Sevilla),* Julio J. Zárate Pinto *(IES La Bureba. Briviesca) y* Sergio Sánchez Zufía *(Navarra)*

*Se recibieron también dos soluciones incorrectas.*