PROBLEMA DEL MES

Diciembre – 2024

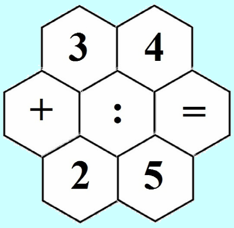
Soluciones oficiales

Real Sociedad
Matemática Española

Alevín (5º/6º Primaria) / Infantil (1º/2º ESO)

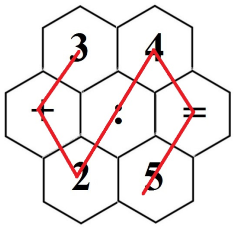
A-051 / I-051. Operación hexagonal.

Traza una línea que empezando por un hexágono del gráfico y continuando por otro adyacente hasta recorrerlos todos quede una expresión matemáticamente correcta con los números y signos por las que transcurre.



Solución

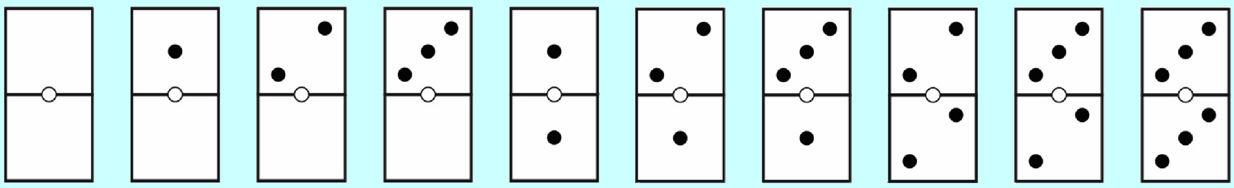
No resulta difícil encontrar la única solución:



Cadete (3º/4º ESO) / Juvenil (1º/2º Bachillerato)

C-051 / Jv-051. Sumas al dominó.

Joan y María se han inventado un juego con estas diez fichas de dominó



· Ponen en un bote las diez fichas.

· La primera jugada la hace Joan colocando encima de la mesa una ficha del bote de manera que el cuadrado de su izquierda sea blanco, esto es, sin punto alguno.

· La segunda jugada la hace la María que coloca encima de la mesa una ficha del bote y a la derecha de la primera que colocó Joan de manera que encaje con la primera según las reglas habituales del juego del dominó, esto es, que dos consecutivas compartan siempre los cuadrados adyacentes con idéntico número de puntos. Si la suma del total de todos los puntos de todas la fichas jugadas hasta el momento es múltiplo de 5, gana María.

· Si María no ha ganado, entonces, Joan pone una tercera ficha que encaje con la última colocada, la segunda de la mesa. Si la suma de todos los puntos de todas la fichas jugadas hasta el momento es un múltiplo de 5, gana Joan.

· Y así sucesivamente.

Se acaba cuando algún jugador gana o cuando no se puede tirar ninguna otra ficha, bien porque se han terminado las fichas del bote, bien porque no queda ficha alguna que encaje debidamente con la de la última jugada y, en éste caso, el juego termina en empate.

La pregunta es, ¿existe, o no, estrategia ganadora para alguno de los jugadores? Y, en su caso, ¿quién dispone de ella, Joan el primero en jugar o María, la que responde en segundo lugar? y ¿cuál sería esa estrategia ganadora?

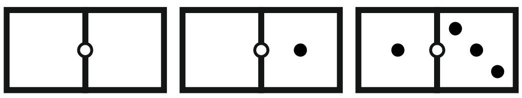
Solución

Joan, el primero en jugar, dispone de estrategia ganadora. Veámoslo:

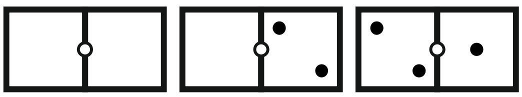
· Joan comienza con la blanca doble, con la ficha $\underline{(0,0)}$.

· Maria, a continuación, ha de responder: $(0,1)$, $(0,2)$ ó $(0,3)$.

- Si juega $(0,1)$, Joan pone $(1,3)$ y gana, pues la suma de puntos de las fichas que hay en la mesa ya es 5.

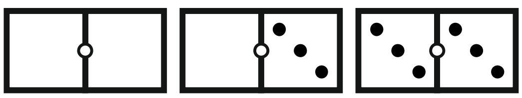


- Si juega $(0,2)$, Joan pone $(2,1)$ y también gana, la suma de puntos es 5.



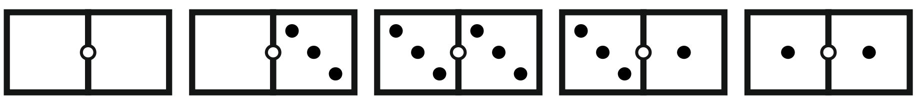
- Por tanto, Maria está obligada a jugar $\underline{(0,3)}$.

· Joan juega $\underline{(3,3)}$, Así, en total, en este momento hay 9 puntos sobre la mesa.



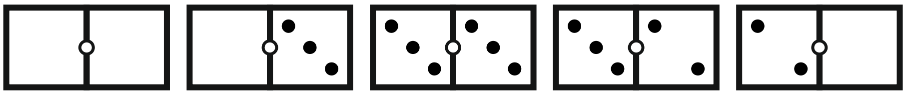
· Ahora Maria puede jugar la ficha $(3,1)$ o la $(3,2)$.

- Si juega $(3,1)$, Joan contesta con la $(1,1)$ y gana, ya que la suma de puntos sobre la mesa es 15, múltiplo de 5.



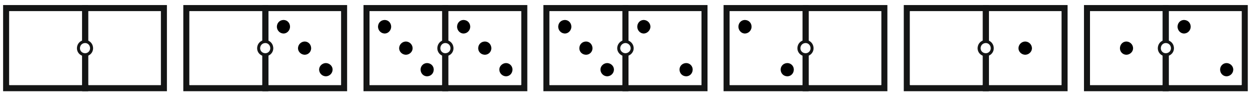
- Por tanto, Maria ha de està obligada a jugar $\underline{(3,2)}$.

· Joan juega $(2,0)$ y, encima de la mesa hay 16 puntos.



· María solo puede jugar la $(0,1)$.

· Y Joan jugando $(1,2)$ gana ya que hay 20 puntos sobre la mesa.



Por tanto, Joan ganará la partida.

Nota.- Cualquier otro inicio de Joan, frente a una rival inteligente como, sin duda, lo será María, le conduce irremediablemente a la derrota, como aquí vemos:

J		M		J		M		J		M		
(0, 1)	→	(1, 3)	gana María									
(0, 2)	→	(2, 1)	gana María									
(0, 3)	→	(3, 1)	→	(1, 2)	María no haría esta jugada							
	→	(3, 2)	→	(2, 0)	María no haría esta jugada							
	→	(3, 3)	→	(3, 1)	→	(1, 1)	gana María					
			→	(3, 2)	→	(2, 0)	→	(0, 0) Mª no haría esta jugada	→	(0, 1)	→	(1, 2)
							→	(0, 1)	→	(1, 2)	gana Mª	
					→	(2, 1)	→	(1, 0)	→	(0, 2)	gana Mª	
							→	(1, 1)	→	(1, 0)	gana Mª	
					→	(2, 2)	→	(2, 0)	Mª no haría esta jugada			

Júnior / Sénior

Jn-051 / S-051. Doce para terminar.

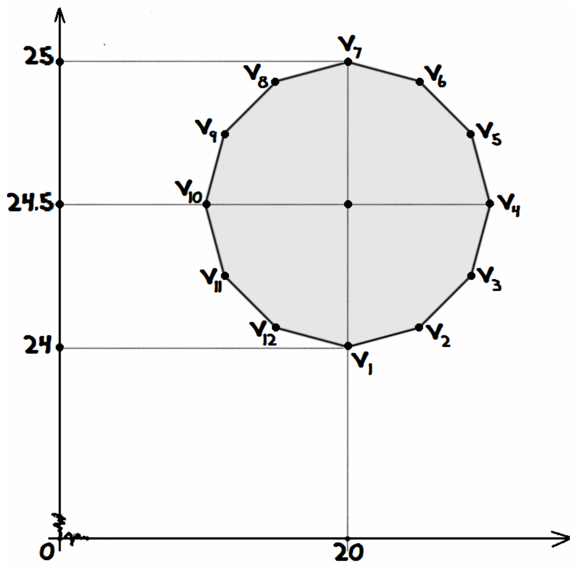
Colocamos un dodecágono regular sobre el plano coordenado de forma que uno de sus vértices y su opuesto caigan exactamente sobre los puntos $(20,24)$ y $(20,25)$ respectivamente. ¿Qué valdrá la suma de todas las diferencias entre la abscisa y la ordenada de cada uno de los doce vértices?

Solución

Si los vértices del dodecágono regular son $V_i(x_i, y_i)$, con $i = 1, 2, ..., 12$ y nos dicen que $V_1(20, 24)$ y $V_7(20, 25)$, con un croquis de la situación, que refleja claramente que el centro es el punto $(20, 24'5)$, se facilita mucho el cómputo de las diferencias entre las abscisas y las ordenadas de cada vértice pedido.

Por la simetría respecto a los ejes

Es fácil ver que no es preciso saber la longitud del desplazamiento con respecto a los ejes de simetría $x = 20$ e $y = 24'5$ de las coordenadas de los vértices:



$V_1(20, 24'5 - 0'5)$ y $V_7(20, 24'5 + 0'5)$

$V_2(20 + x, 24'5 - m)$ y $V_{12}(20 - x, 24'5 - m)$

$V_3(20 + y, 24'5 - n)$ y $V_{11}(20 - y, 24'5 - n)$

$V_4(20 + z, 24'5)$ y $V_{10}(20 - z, 24'5)$

$V_5(20 + y, 24'5 + n)$ y $V_9(20 - y, 24'5 + n)$

$V_6(20 + x, 24'5 + m)$ y $V_8(20 - x, 24'5 + m)$

Por tanto, como vemos, $S = (20 - 24'5) \cdot 12 \quad \rightarrow \quad \underline{S = -30}$

■