LIX Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
10 y 11de marzo de 2023
PROBLEMAS Y SOLUCIONES

Problema 1: *Tenemos un cubo de lado* 3 *formado por* 27 *piezas cúbicas de lado* 1*. Dentro de cada pieza hay una bombilla que puede estar encendida o apagada. Cada vez que se pulsa una pieza (no es posible pulsar la del centro del cubo), cambia el estado de su bombilla y el de las que comparten una cara con la pulsada. Inicialmente, todas las bombillas están apagadas. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:*

(1) ¿Se puede conseguir que todas las bombillas queden encendidas?

(2) ¿Se puede conseguir que queden encendidas todas salvo la del centro del cubo?

(3) ¿Se puede conseguir que solo quede encendida la del centro del cubo?

Solución: Llamamos N a la pieza de lado 1 que está en el interior, C a cada pieza que es centro de una cara, V a cada pieza que es vértice del cubo y A a cada una de las que comparten cara con un vértice.
Es evidente que el resultado obtenido tras pulsar varias piezas es independiente del orden en que las pulsemos.

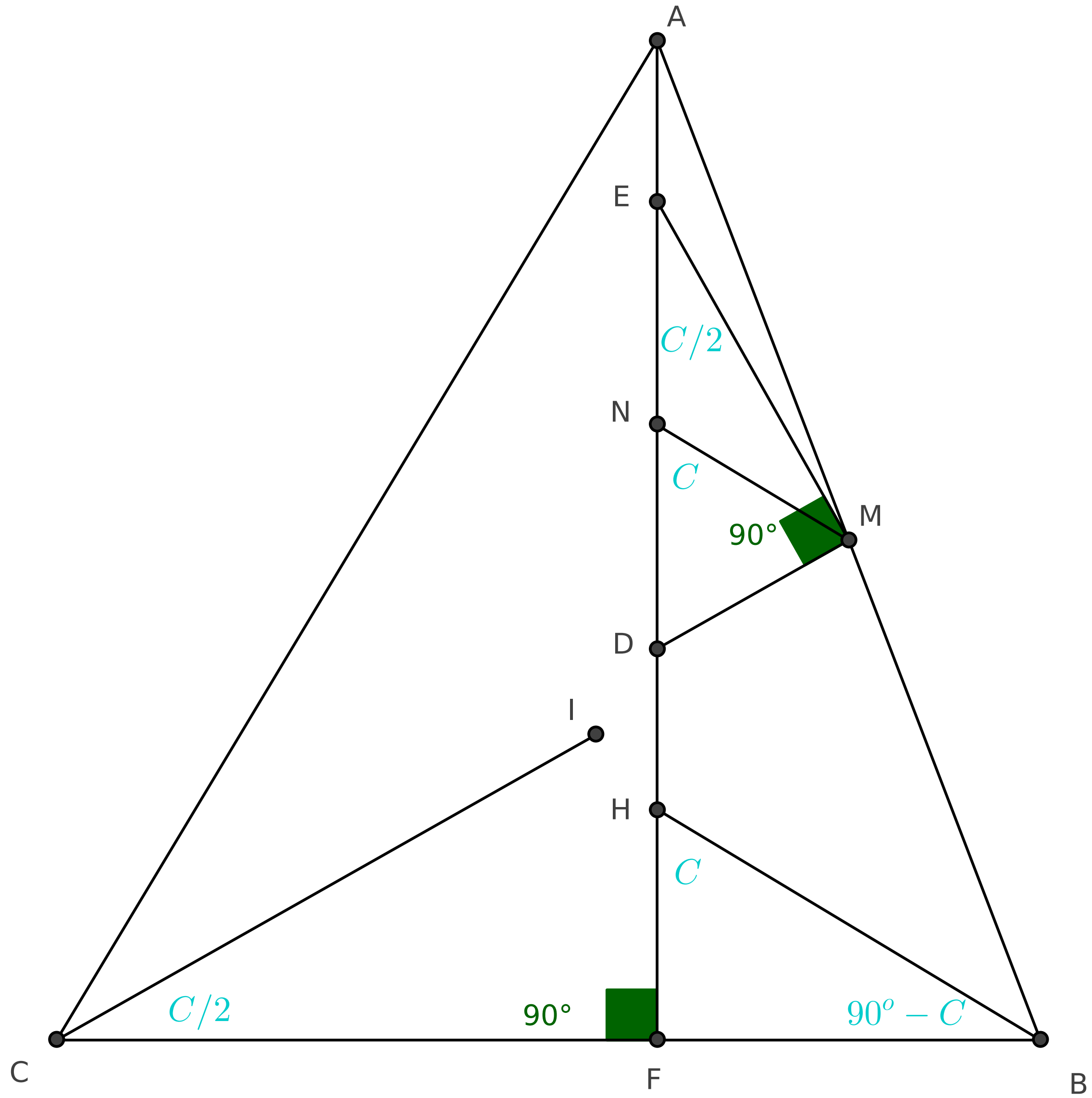
(1) El estado de la bombilla de N cambia si y solo si pulsamos una C. Para que quede encendida hemos de pulsar un número impar de veces en piezas C (ya no pulsamos más C's). Quedarán un número impar de piezas C apagadas. La única manera de cambiar su estado es pulsar A's, pero cada una cambia el estado de dos C's, luego es imposible que todas las C's y N queden encendidas.

(2) Sí es posible. Pulsamos todas las A y quedan encendidas todas ellas y todas las V. Están apagadas las C y la N. Ahora pulsamos todas las C: las V no se ven afectadas; cada A sufre dos cambios, luego sigue encendida, y N queda apagada porque cambia su estado un número par de veces.

(3) No es posible. Si lo fuera, se podría pasar del caso 2 (todas menos N encendidas) al caso 3. Y eso supondría disponer de una sucesión de pulsaciones que permite cambiar el estado de todas las bombillas, lo cual es inviable por lo visto en 1. □

Problema 2: *Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con incentro I y ortocentro H. Sea M el punto medio de AB. Sobre la recta AH se consideran puntos D y E tales que la recta MD es paralela a CI y ME es perpendicular a CI. Prueba que $AE = DH$.*

Solución 1: Demostraremos que los segmentos AH y DE tienen el mismo punto medio, lo cual probará que $AE = DH$.



Sea $F = AH \cap BC$. Sea N el punto medio de DE, que es el circuncentro del triángulo rectángulo DEM. Vemos que las rectas DE y EM forman el mismo ángulo que sus perpendiculares BC y CI, esto es, $\angle DEM = \angle BCI$. Multiplicando por 2 tenemos que $\angle DNM = \angle BCA$.

Por otra parte, es claro que $\angle FHB = 90^o - \angle HBC = \angle BCA$. Esto prueba que las rectas MN y BH son paralelas, por lo tanto N es el punto medio de AH. Finalmente, la simetría de centro N permite concluir que $AE = DH$. $\square$

Solución 2: Supongamos sin pérdida de generalidad que $\angle A > \angle B$. Tenemos que $\angle AEM = \frac{\angle C}{2}$ y $\angle ADM = 90 - \frac{\angle C}{2}$. Usando el teorema del seno en AEM y ADM respectivamente, se tiene que

$$AE = \frac{\sin\left(\frac{\angle A - \angle B}{2}\right)c}{2\sin\frac{\angle C}{2}} \quad \text{y} \quad AD = \frac{\cos\left(\frac{\angle A - \angle B}{2}\right)c}{2\cos\frac{\angle C}{2}},$$

donde $c = AB$. Usando que $DH = AD - AH$ y $AH = \frac{c\cos\angle A}{\sin\angle C}$, la igualdad a demostrar es equivalente a

$$\sin\left(\frac{\angle A - \angle B}{2}\right)\cos\frac{\angle C}{2} = \cos\left(\frac{\angle A - \angle B}{2}\right)\sin\frac{\angle C}{2} - \cos\angle A,$$

donde hemos usado que $\sin\angle C = 2\sin\frac{\angle C}{2}\cos\frac{\angle C}{2}$. A su vez, la anterior igualdad trigonométrica se puede reescribir como

$$\cos\angle A = \sin\left(\frac{\angle B + \angle C - \angle A}{2}\right).$$

El término de la derecha es simplemente $\sin(90° - \angle A) = \cos\angle A$, como se quería ver. $\square$

Solución 3: Sea X el punto medio de DE. Como MDE es rectángulo en M, tenemos que $\angle XMD = \angle MDX = 90^{o} - \frac{C}{2}$, ya que al ser MD paralela a CI, el ángulo formado por MD con la recta DX (que es la altura sobre BC) es 90º menos el ángulo formado por la bisectriz CI con BC. Al mismo tiempo, como MD es paralela a CI, el ángulo $\angle MDA$ es el mismo que el formado por la recta CI con la recta AB, es decir $180^{o} - \angle A - \frac{1}{2}\angle C$. Tenemos entonces que

$$\angle XMA = \angle DMA - \angle DMX = 90^{o} - \angle A = \angle ABH.$$

Luego las rectas AH y MX son paralelas, y por el teorema de Tales X es también el punto medio de AH. Finalmente,

$$AE = AX - EX = HX - DX = DH,$$

y hemos terminado. $\square$

Problema 3. *Halla todas las cuaternas* (a, b, c, d) *de números enteros positivos que cumplen que*

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

y de manera que $ac + bd$ *es divisor de* $a^2 + b^2$.

Solución 1: Usando la identidad

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)^2,$$

observamos que si k es el valor (entero positivo) de $\frac{a^2+b^2}{ac+bd}$, entonces

$$(ad - bc)^2 = (k^2 - 1)(ac + bd)^2,$$

y por tanto

$$\frac{ad - bc}{ac + bd} = \pm\sqrt{k^2 - 1}.$$

Es conocido que si la raíz cuadrada de un entero es racional, entonces es entera. Esto quiere decir que $k^2 - 1$ es un cuadrado perfecto, lo cual solo es posible si $k = 1$. En ese caso, $ad - bc = 0$, que reordenando da $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$. El cuadrado de esta razón es $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = 1$, por lo que $a = c$ y $b = d$. Concluimos que las soluciones son las cuaternas de la forma (a, b, a, b), que siempre cumplen las condiciones. $\square$

Solución 2: Pongamos $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = m$, de manera que existen $\alpha, \beta \in [0, \pi/2)$ con

$$a = \sqrt{m}\cos\alpha, \quad b = \sqrt{m}\sin\alpha, \quad c = \sqrt{m}\cos\beta, \quad d = \sqrt{m}\sin\beta.$$

De esta manera,

$$ac + bd = m\cos\alpha\cos\beta + m\sin\alpha\sin\beta = m\cos(\beta - \alpha),$$

y la condición de $ac + bd$ divida a $a^2 + b^2$ es equivalente a

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Entonces, $\sin(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} c = \sqrt{m}\cos(\beta - \alpha + \alpha) &= \sqrt{m}\cos(\beta - \alpha)\cos(\alpha) + \sqrt{m}\sin(\beta - \alpha)\sin(\alpha) \\ &= a\cos(\beta - \alpha) + b\sin(\beta - \alpha) \\ &= \frac{a}{n} + \frac{b\sqrt{n^2 - 1}}{n}. \end{aligned}$$

Como c es entero, en particular es un número racional: dado que a/n lo es, $b\sqrt{n^2 - 1}/n$ tiene que ser racional, lo que quiere decir que $n^2 - 1$ es un cuadrado perfecto (la raíz cuadrada de un número entero es entero o irracional), lo cual ocurre si y solo si $n = 1$. En particular, $\cos(\beta - \alpha) = 1$, con lo que $\alpha = \beta$, dado que $\alpha, \beta \in [0, \pi/2)$. Eso implica que $a = c$ y $b = d$. Esa condición, además de necesaria, es suficiente, dado que en ese caso $ac + bd = a^2 + b^2$ y el cociente es 1. Por lo tanto, las cuaternas que cumplen el enunciado son las de la forma (a, b, a, b).

Comentario. La intuición para esta solución procede de pensar en (a, b) y (c, d) como vectores de la misma longitud, entonces el seno y el coseno del ángulo que forman tienen que ser racionales. $\square$

Problema 4. *Sean $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ cuatro números reales. Demuestra que existen $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado dos con coeficientes reales tales que x_1, x_2, x_3 y x_4 son las raíces de $P(Q(x))$ si y solamente si $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.*

Solución 1: Supongamos que las raíces de $P(x)$ son r y s. Entonces las raíces de $P(Q(x))$ son las raíces de $Q(x) - r$ y de $Q(x) - s$. Por las relaciones de Cardano, la suma de las raíces de $Q(x) - r$ es la misma que la de $Q(x) - s$, con lo que las raíces de $P(Q(x))$ necesariamente satisfacen que la suma de dos de ellas coincide con la suma de las otras dos.
Vamos a demostrar ahora el recíproco. Consideremos una cuaterna (x_1, x_2, x_3, x_4) con $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Por tanto, queremos elegir $(Q(x), r, s)$ de manera que

$$Q(x) - r = (x - x_1)(x - x_4), \quad Q(x) - s = (x - x_2)(x - x_3).$$

Para ello, pongamos $Q(x) = x^2 - (x_1 + x_4)x$. La condición se reescribe por tanto como

$$r = -x_1 x_4, \quad s = -x_2 x_3,$$

y hemos acabado. □

Solución 2: Sea $Q(x) = x^2 + ax + b$ y $P(x) = x^2 + cx + d$. Entonces

$$P(Q(x)) = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b + c)x^2 + a(2b + c)x + (b^2 + bc + d).$$

Dado un polinomio de grado 4 de la forma

$$R(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

vamos a demostrar que se puede escribir como $P(Q(x))$ si y solamente si

$$\frac{\alpha}{2}\left(\beta - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = \gamma.$$

Para ello, vamos a estudiar cuándo es posible construir a, b, c y d. En primer lugar $a = \alpha/2$. Supongamos ahora que $\alpha \neq 0$ y luego trataremos el caso $\alpha = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} 2b + c &= \beta - (\alpha/2)^2 \\ 2b + c &= 2\gamma/\alpha, \end{aligned}$$

donde α se puede invertir por la condición $\alpha \neq 0$. De aquí resulta que la condición exigida es necesaria, y si esta se cumple tenemos que cualquier elección del par (b, c) con $2b + c = \beta - (\alpha/2)^2$ nos sirve. Finalmente, una vez hemos fijado b y c, ponemos $d = \delta - b^2 - bc$. En el caso $\alpha = 0$, observamos que $P(Q(x)) = x^4 + (2b + c)x^2 + (b^2 + bc + d)$ y la condición es equivalente a $\gamma = 0$. En ese caso, ponemos $a = 0$ y escogemos un par (b, c) que cumpla $2b + c = \beta$, e igual que antes ponemos $d = \delta - b^2 - bc$. Por otro lado, si $\gamma \neq 0$ claramente no es posible

escribir $R(x)$ como $P(Q(x))$ pues si el coeficiente con x^3 es 0 también lo será el coeficiente con x.
Vamos a empezar demostrando que si $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, entonces

$$\frac{\alpha}{2}\left(\beta - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = \gamma.$$

Pongamos $x_4 = x_2 + x_3 - x_1$. Entonces, un cálculo elemental muestra que

$$\begin{aligned}
\alpha &= -2(x_2 + x_3),\\
\beta &= 3x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1^2,\\
\gamma &= x_1^2(x_2 + x_3) - x_1(x_2^2 + x_3^2) - x_2x_3(x_2 + x_3) - 2x_2x_3x_1.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores, es inmediato ver que se cumple la condición sobre α, β y γ.
De la misma manera, si tomamos x_1, x_2, x_3, x_4 arbitrarios, podemos sustituir las cantidades

$$\begin{aligned}
\alpha &= -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),\\
\beta &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4,\\
\gamma &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4
\end{aligned}$$

en la expresión

$$\frac{\alpha}{2}\left(\beta - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = \gamma.$$

Reescribiéndola en términos de x_4, tenemos la ecuación de tercer grado

$$x_4^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x_4^2 + (2\sum x_1x_2 - \sum x_1^2) + \sum x_1^3 + 2x_1x_2x_3 - \sum x_1^2x_2 = 0,$$

donde los sumatorios denotan las correspondientes sumas simétricas (por ejemplo, $\sum x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$). Las soluciones son $x_1 + x_2 - x_3$, $x_2 + x_3 - x_1$, $x_3 + x_1 - x_2$, y dado que tenemos la condición $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$, necesariamente se ha de cumplir que $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. $\square$

Problema 5. *Tenemos una fila de* 203 *casillas. Inicialmente la casilla de más a la izquierda contiene* 203 *fichas, y las demás están vacías. En cada movimiento podemos hacer una de estas dos operaciones:*

- *Tomar una ficha, y desplazarla a una casilla adyacente (a izquierda o derecha).*

- *Tomar exactamente 20 fichas de una misma casilla y desplazarlas todas a una casilla adyacente (todas a la izquierda o todas a la derecha).*

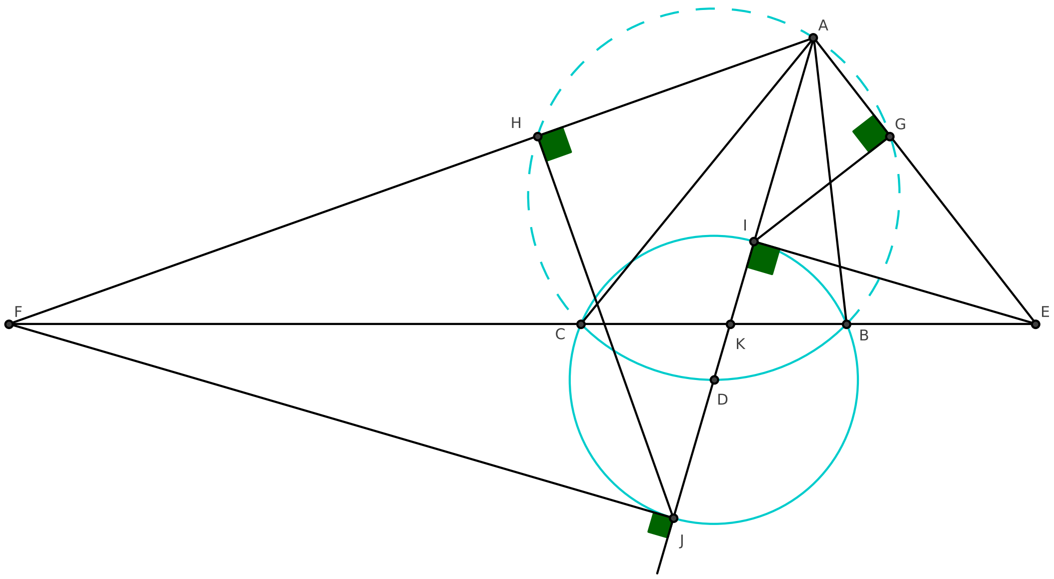
Tras 2023 movimientos, cada casilla contiene una ficha. Demuestra que existe una ficha que se ha desplazado hacia la izquierda al menos nueve veces.

Solución: Consideramos la frontera entre la n-ésima y la $n+1$-ésima casilla por la derecha. La cantidad neta de fichas que tiene que cruzar esa frontera es n. Vamos a contar cuántos movimientos han tenido que desplazar fichas a través de ella. Si $n = 20k + r$, donde r es el residuo al dividir n entre 20, el número mínimo de movimientos es $k+r$ si $r \in \{0, 1, \ldots, 10\}$, y $k+1+(20-r)$ si $r \in \{11, 12, \ldots, 19\}$.

Sumando esta cantidad para n entre 1 y 202, el resultado es 2023. Por lo tanto, el número de movimientos que ha cruzado cada una de las fronteras es exactamente el descrito anteriormente. En particular, en la frontera entre las casillas 11ª y 12ª por la derecha (que tiene un cruce neto de 11 fichas) se han realizado diez movimientos: uno en el que 20 fichas se han desplazado hacia la derecha y nueve en los que fichas individuales se han desplazado a la izquierda. De las veinte fichas que se han desplazado de golpe a la 11ª casilla por la derecha, una de ellas ha tenido que terminar en la 20ª o más a la izquierda, con lo que se ha desplazado a la izquierda al menos nueve veces. □

Problema 6. *En el triángulo escaleno ABC con incentro I, la recta AI corta de nuevo a la circunferencia circunscrita en el punto D, y J es el punto tal que D es el punto medio de IJ. Se consideran puntos E y F en la recta BC tales que IE y JF son perpendiculares a AI. Se consideran puntos G en AE y H en AF tales que IG y JH son perpendicualres a AE y AF, respectivamente. Prueba que $BG = CH$.*

Solución 1:



Probaremos que G y H están en la circunferencia circunscrita de ABC, y que $GH||BC$. Esto implicará que los puntos B, C, H, G forman un trapecio isósceles con $BG = CH$, y habremos terminado.

Comenzamos observando que J es el A-exincentro de ABC, el punto de corte de la bisectriz interior de A y las bisectrices exteriores de B y C. Además, D es el circuncentro del cuadrilátero cíclico $BICJ$, cuya circunferencia circunscrita ω tiene diámetro IJ y es tangente a las rectas IE y JF.

A continuación, calculamos la potencia desde E a ω y a la circunferencia de diámetro IA (que pasa por G y es tangente a EI), y la potencia desde F a ω y a la circunferencia de diámetro JA (que pasa por H y es tangente a FI), obteniendo:

$$EB \cdot EC = EI^2 = EA \cdot EG,$$
$$FB \cdot FC = FJ^2 = FA \cdot FH,$$

lo cual muestra que G y H pertenecen al circuncírculo de ABC.

Por otra parte, si $K = AI \cap BC$, vemos que BI y BJ son respectivamente las bisectrices interior y exterior de B en el triángulo ABK, lo que permite aplicar el teorema de la bisectriz:

$$\frac{IA}{IK} = \frac{BA}{BK} = \frac{JA}{JK}.$$

En particular $\frac{IA}{JA}$ es igual a $\frac{IK}{JK}$, que a su vez coincide con $\frac{IE}{JF}$ (puesto que los triángulos KIE y KJF son semejantes). Esto prueba que los triángulos rectángulos AIE y AJF son semejantes. En la transformación de semejanza que lleva el primer triángulo en el segundo, es claro que G se corresponde con H, pues las alturas IG y JH son correspondientes. Como consecuencia de la semejanza se deduce que $\frac{AG}{AE} = \frac{AH}{AF}$, y por el teorema de Thales (recíproco) se obtiene que GH es paralelo a EF, lo que faltaba por demostrar para acabar el problema. $\square$

Solución 2: Llamando I_A al A-exincentro, por caza de ángulos se puede demostrar que los triángulos DIB, DIC, DI_AB, DI_AC son todos isósceles en D. Es decir, el cuadrilátero $BICI_A$ es cíclico con circuncentro en D, que por arco capaz es el punto medio del arco BC que no contiene a A y está en la mediatriz de BC. Como I, D, I_A están sobre la bisectriz del ángulo A, entonces D es el punto medio de II_A, y concluimos que $J = I_A$ es el A-exincentro. Denotaremos por ω a la circunferencia circunscrita a $BICJ$, que tiene por lo tanto centro en D.

Como IJ es claramente diámetro de ω y las rectas EI, FJ son perpendiculares a IJ, se tiene EI, FJ son tangentes a ω. Por lo tanto, por el teorema de la potencia se tiene que $EB \cdot EC = EI^2$ y que $FB \cdot FC = FJ^2$. Ahora bien, como los triángulos IGE y AIE son ambos rectángulos en G, I respectivamente, y comparten el ángulo $\angle GEI = \angle IEA$, entonces son semejantes y por lo tanto $EI^2 = EG \cdot EA$. Luego $EB \cdot EC = EG \cdot EA$, y por el teorema de la potencia G está en la circunferencia Ω circunscrita a ABC. De forma análoga $FB \cdot FC = FH \cdot FA$ y H está en Ω.

Llamemos X al punto donde la bisectriz del ángulo A corta al lado BC. Es conocido por el teorema de la bisectriz que $\frac{BX}{CX} = \frac{AB}{AC}$, que también podemos expresar como $\frac{BX}{BA} = \frac{CX}{CA}$. Es decir, podemos definir un círculo de Apolonio como el conjunto de los puntos P del plano tales que $\frac{PX}{PA} = \frac{BX}{BA} = \frac{CX}{CA}$. Ahora bien, el centro de este círculo está en la bisectriz AX del ángulo A, y a su vez en la mediatriz de BC, es decir en D, con lo que el círculo de Apolonio es ω. Como I, J pertenecen a este círculo, se tiene entonces que

$$\frac{BX}{BA} = \frac{CX}{CA} = \frac{IX}{IA} = \frac{JX}{JA}.$$

Consideremos ahora los triángulos EIX y FJX, que al compartir el ángulo $\angle EXI = \angle FXJ$ y ser rectángulos en I, J respectivamente, son semejantes. Luego usando la relación anterior del círculo de Apolonio, tenemos que

$$\frac{FJ}{EI} = \frac{JX}{IX} = \frac{JA}{IA}.$$

Pero los triángulos EIA y FJA son rectángulos en I, J respectivamente, luego son semejantes, y

$$\angle GAB = \angle GAD - \angle BAD = \angle EAI - \angle BAD = \angle FAJ - \angle CAD =$$

$$= \angle HAD - \angle CAD = \angle HAC,$$

y como BG, CH son cuerdas de Ω subtendidas por el mismo ángulo, tienen la misma longitud, como queríamos demostrar. $\square$