LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024

Mañana del viernes 19 de enero de 2024

Primera sesión

Problema 1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \ldots + 11\ldots11$$

sea divisible por 45.

Problema 2. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 5 y sean a y b son números reales diferentes de 0. Supongamos que el resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax + b$ es igual al resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax^2 + b$. Determinar el valor de $a + b$.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Sean J e I los puntos medios de las diagonales AC y BD, respectivamente. Sea G el punto de la recta BC tal que DG es perpendicular a BC y sea H el punto de la recta AD tal que CH es perpendicular a AD. Las rectas DG y CH se cortan en el punto K. Sea E el punto de la recta BC tal que AE es perpendicular a BC y sea F el punto de la recta AD tal que BF es perpendicular a AD. Las rectas AE y BF se cortan en el punto L. Probar que KL es perpendicular a JI.

LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024

Tarde del viernes 19 de enero de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Problema 5. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y.
- X e Y son amigos.

Problema 6. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tres números enteros y sea $p \geq 5$ un número primo. Demostrar que si $an^2 + bn + c$ es el cuadrado de un número entero para $2p - 1$ valores consecutivos de n, entonces $b^2 - 4ac$ es un múltiplo de p.

LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024

Tarde del viernes 19 de enero de 2024

Primera sesión

Problema 1. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD. La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F. Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Problema 2. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

- X tiene el mismo número de enemigos que Y.
- X e Y son amigos.

Problema 3. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tres números enteros y sea $p \geq 5$ un número primo. Demostrar que si $an^2 + bn + c$ es el cuadrado de un número entero para $2p - 1$ valores consecutivos de n, entonces $b^2 - 4ac$ es un múltiplo de p.

LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024

Mañana del sábado 20 de enero de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Sea $a > 1$ un número real. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

en términos de a.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y D el punto de AB que es el pie de la altura desde C. Sea P un punto arbitrario en el lado BC. Las rectas AP y CD se cortan en el punto E, y las rectas BE y AC se cortan en el punto Q. Probar que CD es la bisectriz del ángulo $\angle PDQ$.

Problema 6. En cada casilla de un tablero de 1000×2024 está escrito un número y no todos ellos son ceros. Para cada casilla, si A es la suma de todos los números escritos en la fila de la casilla (incluido el número de casilla) y B es la suma de todos los números de la columna de la casilla (incluido el número de la casilla), entonces el número escrito en la casilla es igual al producto AB. Hallar la suma de todos los números del tablero y dar un ejemplo de tablero que tenga, en cada fila, todos los números distintos, y en cada columna, todos los números distintos.

LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024
Comunidad de Madrid

Mañana del sábado 20 de enero de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Determinar todos los pares (a, b) de enteros positivos que verifican

$$a! = b^2 + 44$$

Problema 5. Consideremos un triángulo ABC; K es su circunferencia circunscrita, e I su incentro. Sea D el punto medio del arco BC de K que no contiene a A, y E el punto medio del arco AC que no contiene a B. Sea F el simétrico de I respecto del lado AB. Si F es un punto de la circunferencia K, determinar la medida del ángulo $\angle DFE$.

Problema 6. En cada casilla de un tablero de 1000×2024 está escrito un número y no todos ellos son ceros. Para cada casilla, si A es la suma de todos los números escritos en la fila de la casilla (incluido el número de casilla) y B es la suma de todos los números de la columna de la casilla (incluido el número de la casilla), entonces el número escrito en la casilla es igual al producto AB. Hallar la suma de todos los números del tablero y dar un ejemplo de tablero que tenga, en cada fila, todos los números distintos, y en cada columna, todos los números distintos.