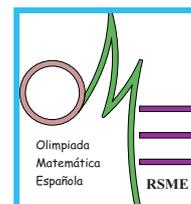




LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024



Mañana del viernes 19 de enero de 2024

Primera sesión

Problema 1. Hallar el menor entero positivo n tal que la suma de los n términos

$$A(n) = 1 + 11 + 111 + \dots + 11\dots 11$$

sea divisible por 45.

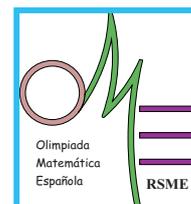
Problema 2. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 5 y sean a y b son números reales diferentes de 0. Supongamos que el resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax + b$ es igual al resto de $P(x)$ al dividirlo por $x^3 + ax^2 + b$. Determinar el valor de $a + b$.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Sean J e I los puntos medios de las diagonales AC y BD , respectivamente. Sea G el punto de la recta BC tal que DG es perpendicular a BC y sea H el punto de la recta AD tal que CH es perpendicular a AD . Las rectas DG y CH se cortan en el punto K . Sea E el punto de la recta BC tal que AE es perpendicular a BC y sea F el punto de la recta AD tal que BF es perpendicular a AD . Las rectas AE y BF se cortan en el punto L . Probar que KL es perpendicular a JI .



LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024



Tarde del viernes 19 de enero de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD . La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F . Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Problema 5. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

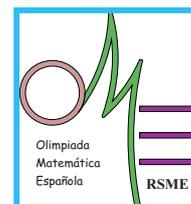
- X tiene el mismo número de enemigos que Y .
- X e Y son amigos.

Problema 6. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tres números enteros y sea $p \geq 5$ un número primo. Demostrar que si $an^2 + bn + c$ es el cuadrado de un número entero para $2p - 1$ valores consecutivos de n , entonces $b^2 - 4ac$ es un múltiplo de p .



LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024



Tarde del viernes 19 de enero de 2024

Primera sesión

Problema 1. Sea $ABCD$ un trapecio de bases AB y CD tal que $AD = DC = CB = 5$ y $AB = 10$. Sea O el punto de intersección de las diagonales AC y BD . La recta perpendicular a AC trazada por O corta a la prolongación del lado AD en E y a la base AB en F . Calcular el área del cuadrilátero $AECF$.

Problema 2. En una fiesta hay 100 personas. Cada par de personas son o bien *amigos* o bien *enemigos* (una y solo una de las dos cosas). Se cumple la siguiente propiedad: si A y B son enemigos y B y C son enemigos, entonces A y C son amigos. Demostrar que hay dos personas X e Y que cumplen simultáneamente estas condiciones:

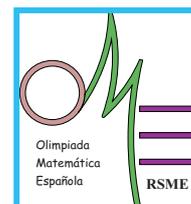
- X tiene el mismo número de enemigos que Y .
- X e Y son amigos.

Problema 3. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tres números enteros y sea $p \geq 5$ un número primo. Demostrar que si $an^2 + bn + c$ es el cuadrado de un número entero para $2p - 1$ valores consecutivos de n , entonces $b^2 - 4ac$ es un múltiplo de p .



LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024



Mañana del sábado 20 de enero de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Sea $a > 1$ un número real. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$$

en términos de a .

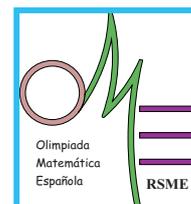
Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y D el punto de AB que es el pie de la altura desde C . Sea P un punto arbitrario en el lado BC . Las rectas AP y CD se cortan en el punto E , y las rectas BE y AC se cortan en el punto Q . Probar que CD es la bisectriz del ángulo $\angle PDQ$.

Problema 6. En cada casilla de un tablero de 1000×2024 está escrito un número y no todos ellos son ceros. Para cada casilla, si A es la suma de todos los números escritos en la fila de la casilla (incluido el número de casilla) y B es la suma de todos los números de la columna de la casilla (incluido el número de la casilla), entonces el número escrito en la casilla es igual al producto AB . Hallar la suma de todos los números del tablero y dar un ejemplo de tablero que tenga, en cada fila, todos los números distintos, y en cada columna, todos los números distintos.



LX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase local, curso 2023 - 2024
Comunidad de Madrid



Mañana del sábado 20 de enero de 2024

Segunda sesión

Problema 4. Determinar todos los pares (a, b) de enteros positivos que verifican

$$a! = b^2 + 44$$

Problema 5. Consideremos un triángulo ABC ; K es su circunferencia circunscrita, e I su incentro. Sea D el punto medio del arco BC de K que no contiene a A , y E el punto medio del arco AC que no contiene a B . Sea F el simétrico de I respecto del lado AB . Si F es un punto de la circunferencia K , determinar la medida del ángulo $\angle DFE$.

Problema 6. En cada casilla de un tablero de 1000×2024 está escrito un número y no todos ellos son ceros. Para cada casilla, si A es la suma de todos los números escritos en la fila de la casilla (incluido el número de casilla) y B es la suma de todos los números de la columna de la casilla (incluido el número de la casilla), entonces el número escrito en la casilla es igual al producto AB . Hallar la suma de todos los números del tablero y dar un ejemplo de tablero que tenga, en cada fila, todos los números distintos, y en cada columna, todos los números distintos.