LX Olimpiada Matemática Española
Concurso Final Nacional
Calatayud, 15 y 16 de marzo de 2024

PROBLEMAS y SOLUCIONES

Problema 1: Consideramos 2024 números primos distintos $p_1, p_2, \ldots, p_{2024}$ tales que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{1012} = p_{1013} + p_{1014} + \cdots + p_{2024}.$$

Sea $A = p_1 p_2 \cdots p_{1012}$ y $B = p_{1013} p_{1014} \cdots p_{2024}$. Demuestra que $|A - B| \geq 4$.

Solución: Comenzamos observando que las factorizaciones de A y B como producto de primos son distintas, luego forzosamente $A \neq B$.

Si uno de los números primos es 2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que este primo es p_1. En ese caso $p_1 + p_2 + \cdots + p_{1012}$ sería impar, por ser la suma de un número par y 1011 números impares, mientras que $p_{1013} + p_{1014} + \cdots + p_{2024}$ es par, al ser la suma de 1012 números impares. Por lo tanto, podemos concluir que 2 no aparece en la suma, y que por tanto todos los números son impares.

Sean n_A y n_B, respectivamente, la cantidad de primos de $\{p_1, \ldots, p_{1012}\}$ y $\{p_{1013}, \ldots, p_{2024}\}$ congruentes con 3 módulo 4. Es claro que el resto de primos son congruentes con 1 módulo 4. Por lo tanto tenemos que

$$3n_A + (1012 - n_A) \equiv p_1 + \cdots + p_{1012} \equiv p_{1013} + \cdots + p_{2024} \equiv 3n_B + (1012 - n_B) \pmod{4}$$

Esto se reduce a $2n_A \equiv 2n_B \pmod{4}$, y por tanto n_A y n_B tienen la misma paridad. De ahí que

$$A \equiv 3^{n_A} 1^{1012 - n_A} \equiv 3^{n_B} 1^{1012 - n_B} \equiv B \pmod{4}$$

Concluimos que la diferencia entre A y B es un múltiplo no nulo de 4, y por tanto al menos 4. □

Problema 2: Sea n un entero positivo. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n > 1$ números reales tales que su producto es $n+1$. Prueba que

$$\left(\frac{1}{1^2(x_1-1)}+1\right)\left(\frac{1}{2^2(x_2-1)}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{n^2(x_n-1)}+1\right) \geq n+1$$

y determina cuándo se alcanza la igualdad.

Solución: La demostración de la desigualdad se basará en el siguiente hecho (del cual daremos dos pruebas diferentes):

Sea m un entero con $1 \leq m \leq n$. Como $x_m > 1$, entonces

$$\frac{1}{m^2(x_m-1)}+1 \geq \frac{(m+1)^2}{x_m \cdot m^2}.$$

Además, la igualdad se cumple si y solamente si $x_m = 1 + \frac{1}{m}$.

- Usando la desigualdad entre las medias aritmética y armónica con los $m+1$ sumandos $\frac{1}{m}, \cdots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2(x_m-1)}$, tenemos que

  $$\left(\frac{1}{m^2(x_m-1)}+m\cdot\frac{1}{m}\right)(m^2(x_m-1)+m\cdot m) \geq (m+1)^2,$$

  y la conclusión es evidente. La igualdad se alcanza si y solamente si $m^2(x_m-1) = m$, esto es, $x_m = 1 + \frac{1}{m}$.

- La desigualdad a demostrar se puede reescribir como

  $$x_m + m^2 x_m(x_m-1) \geq (m+1)^2(x_m-1).$$

  A su vez, esto es una desigualdad cuadrática en x_m:

  $$m^2 \cdot x_m^2 + \big(-m^2-(m+1)^2+1\big)x_m + (m+1)^2 = (mx_m-m-1)^2 \geq 0.$$

  La desigualdad se cumple siempre; la igualdad se cumple si y solamente si $x_m = 1 + \frac{1}{m}$.

Multiplicando la desigualdad para todos los valores de m, nos queda que

$$\left(\frac{1}{1^2(x_1-1)}+1\right)\left(\frac{1}{2^2(x_2-1)}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{n^2(x_n-1)}+1\right) \geq$$

$$\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\frac{2^2\cdot 3^2\cdots(n+1)^2}{1^2\cdot 2^2\cdots n^2}.$$

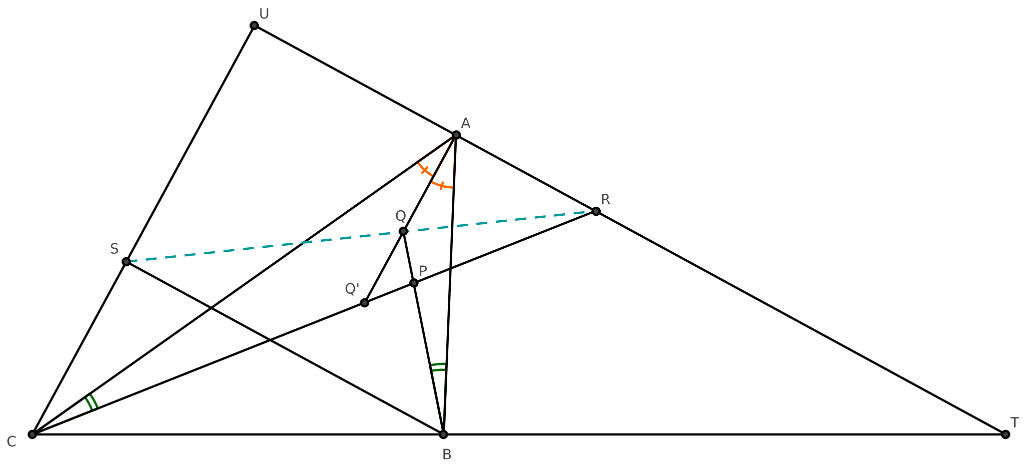
Cancelando los factores repetidos en el numerador y en el denominador y usando que el producto de los x_i es $n+1$ nos queda el resultado deseado.

Una condición necesaria para tener la igualdad es que $x_m = 1 + \frac{1}{m}$ para todo m. De este modo, todas las desigualdades que hemos usado son igualdades y además se cumple la condición de que el producto es $n+1$, con lo cual también es una condición suficiente. $\square$

Problema 3: Sean ABC un triángulo escaleno y P un punto interior tal que $\angle PBA = \angle PCA$. La recta PB corta a la bisectriz interior de A en el punto Q; la recta PC corta a las bisectriz exterior de A en el punto R. Sea S el punto tal que CS es paralela a AQ y BS es paralela a AR. Demuestra que Q, R, S están alineados.

Solución:

El caso isósceles $AB = AC$ es trivial ya que se dan las coincidencias $P = Q$ y $S = C$.



Asumimos $AB < AC$, y suponemos que la recta AR corta a BC en T y a CS en U, y sea $Q' = AQ \cap CP$. Los segmentos paralelos AQ' y UC son correspondientes en una homotecia de centro R. Veamos que esta homotecia hace corresponder Q con S, para lo cual basta comprobar que se conservan las razones $\frac{AQ}{AQ'} = \frac{US}{UC}$ (es claro que S está entre C y U, y más adelante confirmaremos que Q se encuentra entre A y Q').

Obsérvese que los triángulos ABQ y ACQ' son semejantes, puesto que se tienen las igualdades de ángulos $\angle QAB = \angle Q'AC$ y $\angle ABQ = \angle ACQ'$. En consecuencia se tiene que $\frac{AQ}{AQ'} = \frac{AB}{AC}$ (aquí se confirma que Q está entre A y Q'). Por otra parte, por el teorema de la bisectriz sabemos que $\frac{AB}{AC}$ es igual a $\frac{TB}{TC}$, que a su vez coincide con $\frac{US}{UC}$, por ser $TU||BS$, lo cual prueba que $\frac{AQ}{AQ'} = \frac{US}{UC}$. Luego, y ya como anunciando el final, el problema termina. $\square$

Problema 4: Sean a, b, c, d cuatro números reales que satisfacen

$$abcd = 1 \quad \text{y} \quad a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} + d + \frac{1}{d} = 0.$$

Demuestra que alguno de los números ab, ac, ad es igual a -1.

Solución 1: Sea $u = a + b + c + d$ y sea $v = ab + ac + ad + bc + bd + cd$. Por las condiciones del enunciado tenemos que

$$abc + bcd + cda + abc = \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -(a + b + c + d) = -u.$$

Por lo tanto, el polinomio que tiene por raíces a, b, c, d es

$$p(x) = x^4 - ux^3 + vx^2 + ux + 1.$$

Observemos que hay una cierta simetría en los coeficientes de $p(x)$. En efecto,

$$x^4 p\left(-\frac{1}{x}\right) = x^4\left(x^{-4} + ux^{-3} + vx^{-2} - ux^{-1} + 1\right) = 1 + ux + vx^2 - ux^3 + x^4 = p(x).$$

En particular, como $p(a) = 0$ y $a \neq 0$ (ya que $abcd = 1$), tenemos que $p\left(-\frac{1}{a}\right) = 0$. No podemos tener $-\frac{1}{a} = a$ al ser a un número real, por lo tanto $-\frac{1}{a}$ ha de ser una de las otras raíces de $p(x)$, y por tanto $-1 \in \{ab, ac, ad\}$. $\square$

Solución 2: Como $abcd = 1$, tenemos que

$$abc + bcd + cda + dab + a + b + c + d = \frac{1}{d} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a + b + c + d = 0.$$

Ahora, expandiendo, se comprueba que

$$\begin{aligned}&(ab + 1)(ac + 1)(ad + 1) = \\ &a(abc + bcd + cda + dab + a + b + c + d) + (a^2 - 1)(abcd - 1) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, uno de los factores $ab + 1$, $ac + 1$, $ad + 1$ es igual a 0, con lo que $-1 \in \{ab, ac, ad\}$. $\square$

Problema 5: Dados dos puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ en el plano, denotamos por $\mathcal{R}(p_1, p_2)$ el rectángulo con lados paralelos a los ejes de coordenadas que tiene los dos puntos como esquinas opuestas, es decir: $\mathcal{R}(p_1, p_2) =$

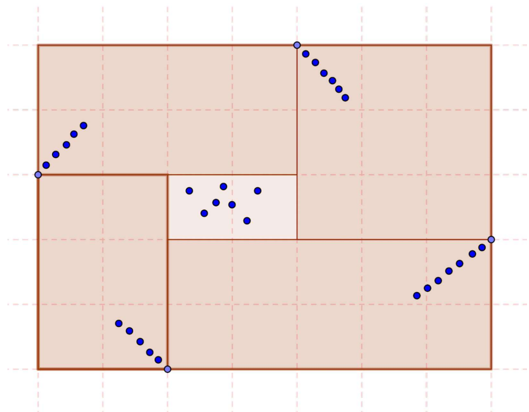
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{mín}(x_1, x_2) \leq x \leq \text{máx}(x_1, x_2), \text{mín}(y_1, y_2) \leq y \leq \text{máx}(y_1, y_2)\}.$$

Determina el mayor valor de k tal que el siguiente enunciado es cierto: "para todo conjunto $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, con $|\mathcal{S}| = 2024$, existen dos puntos $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ tales que $|\mathcal{S} \cap \mathcal{R}(p_1, p_2)| \geq k$".

Solución: La respuesta es $k = \frac{2024+6}{5} = 406$.

Demostremos, en primer lugar, que siempre existen dos puntos, $p_1, p_2 \in \mathcal{S}$ tales que $|\mathcal{S} \cap \mathcal{R}(p_1, p_2)| \geq 406$. Si todos los puntos de $\mathcal{S}$ tienen la misma coordenada x (o misma y), escogiendo los puntos extremos de la recta siempre tenemos $|\mathcal{S} \cap \mathcal{R}(p_1, p_2)| = 2024 \geq k$. Supongamos ahora que no todos los puntos tienen la misma coordenada x ni la misma coordenada y.

Sean p_1, p_2 puntos con coordenada x mínima y máxima respectivamente, y sean q_1, q_2 puntos con coordenada y mínima y máxima respectivamente. Consideremos los 5 rectángulos $\mathcal{R}(p_1, q_2)$, $\mathcal{R}(q_2, p_2)$, $\mathcal{R}(p_2, q_1)$, $\mathcal{R}(q_1, p_1)$ y $\mathcal{R}(p_1, p_2)$. Estos rectángulos cubren todos los puntos, y los puntos q_1 y q_2 están en al menos 2 rectángulos y los p_1 y p_2 están en la menos 3 rectángulos. Por tanto, uno de esos rectángulos cubre al menos $\frac{2024+6}{5}$ puntos. (Los casos en que ocurra que $p_i = q_j$ son más sencillos de comprobar).



Para ver que 406 es el valor máximo, hacemos una construcción como la de la figura: en el interior de cada rectángulo de los bordes hay 404 puntos; los 404 puntos del interior del rectángulo central, $\mathcal{R}(p_1, p_2)$, están fuera de los otros cuatro rectángulos. Al contar tambien los 4 puntos extremos comprobamos que ninguno de los cinco rectángulos contiene más de 406 puntos. $\square$

Problema 6: Sean a, b y n enteros positivos, que satisfacen que bn es divisor de $an - a + 1$. Sea $\alpha = a/b$. Demuestra que, al dividir los números $\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \ldots, \lfloor (n-1)\alpha \rfloor$ entre n, los restos resultantes son iguales a $1, 2, \ldots, n-1$, en algún orden.

Solución: Puesto que $\lfloor 0\alpha \rfloor = 0$, basta con demostrar que no existen dos valores $0 \leq i < j \leq n-1$ tales que $\lfloor i\alpha \rfloor \equiv \lfloor j\alpha \rfloor \pmod{n}$. Por reducción al absurdo, supongamos que esos dos valores existen y sea r el resto común. Si s es el resto de ia módulo b, con $0 \leq s < b$, el número $i\alpha$ se puede expresar como

$$\frac{ia}{b} = i\alpha = \lfloor i\alpha \rfloor + \frac{s}{b} = kn + r + \frac{s}{b}$$

para un entero k. Análogamente, si t es el resto de ja módulo b, con $0 \leq t < b$, entonces

$$\frac{ja}{b} = \ell n + r + \frac{t}{b}$$

para algún ℓ. Tomando la diferencia de las dos expresiones, obtenemos

$$\frac{(j-i)a}{b} = (\ell - k)n + \frac{t-s}{b}.$$

Multiplicando la expresión anterior por b, y tomando módulo bn, se obtiene

$$(j-i)a \equiv t - s \pmod{bn}.$$

Multipicando a ambos lados por $n-1$ se obtiene

$$(j-i)(n-1)a \equiv (t-s)(n-1) \pmod{bn}.$$

La condición del enunciado implica que $(n-1)a \equiv -1 \pmod{bn}$, luego

$$(t-s)(n-1) + (j-i) \equiv 0 \pmod{bn}.$$

Esos valores satisfacen $1 \leq j - i \leq n-1 \quad$ y $\; -(b-1) \leq t-s \leq b-1$, luego

$$-bn < -(b-1)(n-1) \leq (t-s)(n-1) + (j-i) \leq (b-1)(n-1) + (n-1) < bn,$$

y por tanto la única posibilidad es que

$$(t-s)(n-1) + (j-i) = 0.$$

En este caso $j - i$ es divisible por $n-1$, lo cual solo es posible con $i = 0$ y $j = n-1$. Pero eso significa que $s = 0$ (puesto que $0a \equiv 0 \pmod{b}$), lo cual conlleva que

$$0 = (t-s)(n-1) + (j-i) = (t+1)(n-1) > 0,$$

obteniendo la contradicción buscada. $\square$